Subgrup

Definiţie1

Fie $(G,*)$ un grup.
O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup a lui G dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii :

1.$\forall$ $x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$
2.$\forall$ $x \in H \Rightarrow x' \in H$

unde x' este simetricul lui x (în raport cu operaţia lui G)

Teoremă

Fie $(G,*)$ un grup, e elementul neutru a lui G şi H un subgrup al lui G.Atunci:

1. $e \in H$
2. H este grup în raport cu operaţia indusă pe H de către operaţia grupului G.

Demonstraţie :

1.$H \subseteq G \Rightarrow *$ lege de compoziţie internă pe H

i.$\forall$ $x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$
2i. $\forall$ $x \in H \Rightarrow x' \in H$

$\Rightarrow x*x' \in H$

dar $x*x'=e \Rightarrow e \in H$

2.$*:H \to H$ op.indusă

H parte stabilă a lui G
- $(G,*)$ un grup $\Rightarrow *$ asociativă pe G $\Rightarrow *$ <u>asociativă</u> pe H
- $\exists$ $e \in H$ a.î. $\underline{x*e=e*x=x\ \forall x \in H}$

- $\forall x \in H$,$\exists x' \in H$ a.î. $\underline{x * x' = x' * x = e}$

=>H=Grup

Exemple

1.Fie (G,$*$) un grup, e elementul neutru şi E={e}.Atunci E este subgrup al lui G ,numit subgrup unitate.

Dacă x,z $\in$E =>x=y=e deci

$$x*y=y*x=e\in E$$
$$x'=e'=e\in E$$

2.Fie n>=0 un număr întreg şi nZ mulţimea tuturor multiplilor lui n,

$$nZ=\{nh \mid h \in Z\}$$

Atunci nZ este subgrup al grupului (Z,+).

Adevărat : dacă x,y $\in$nZ, $\exists$ h,k $\in$ Z a.i. x=nh ,y=nk

$$=>x+y=nh+nk=n(h+k) \in nZ$$
$$-x= -(nh)=n(-h) \in nZ$$

deci nZ este subgrup al lui (Z,+)

Definiţie

Fie (G,$\bullet$) un grup ,a $\in$G şi n>0.Spunem ca a este element de ordinul n al grupului G dacă a^n =e si $a^h \neq e$,h=1,2 …n-1