Numere complexe

În matematică, **numerele complexe** au apărut ca soluţii ale ecuaţiilor de forma $x^2 + p = 0$, cu *p* număr real strict pozitiv, aşa cum numerele iraţionale apăruseră din necesitatea de a descrie soluţii ale ecuaţiilor de forma $x^2 - q = 0$, unde q nu este un pătrat perfect.
Formal, mulţimea **numerelor complexe** reprezintă mulţimea tuturor perechilor ordonate de numere reale, (a, b), înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai jos:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.
Mulţimea numerelor complexe formează un corp, corpul numerelor complexe, notat cu $\mathbb{C}$.
Elementul neutru al operaţiei de adunare este $(0, 0)$iar elementul neutru al operaţiei de inmulţire este $(1, 0)$.
Deoarece $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$şi $(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)$, mulţimea numerelor reale, $\mathbb{R}$, poate fi privită ca submulţime a lui $\mathbb{C}$, identificînd numărul real $a$cu $(a, 0)$.
Numărul complex $(0, 1)$are proprietatea $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$, adică $(0, 1)^2 = (-1, 0)$identificat cu numărul real -1.
Nici un număr real nu are această proprietate.
Forma algebrică
Numărul complex $(0, 1)$este notat cu işi $i^2 = -1$.
Ţinînd cont de cele de mai sus, un număr complex (a, b)poate fi scris
$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.
Forma algebrică a unui număr complex este $z = a + bi$, unde a şi b sunt numere reale.
$(0, 1) = i$**unitatea imaginară** ; $(0, 0) = 0$; $(1, 0) = 1$.
Pentru un număr complex $z = a + bi$, $a$se numeşte **partea reală** a lui zşi se notează $a = Re(z)$ iar $b$se numeşte **partea imaginară** a lui zşi se notează $b = Im(z)$.
Egalitatea a două numere complexe *z = (a,b)= a + bi* şi *w =(c,d) = c + di* are loc dacă *a = c* şi *b = d.*
Suma a două numere complexe *z = (a,b)= a + bi* şi *w =(c,d) = c + di* este *z + w = (a + c, b + d)= (a+c) + i(b +d).*
Produsul a două numere complexe *z = (a,b)= a + bi* şi *w =(c,d) = c + di* este *zw = (ac -bd, bc + ad)= (ac-bd) + i(bc+ad).*
Exemplu : pentru z = (2,3)= 2 + 3i şi w =(1,4) = 1 + 4i avem zw = (-10, 11)= -10 + 11i, z + w = (3, 7)= 3 + 7i .
Forma trigonometrică
Orice număr complex a cărui formă algebrică este *z = a + bi* poate fi scris şi sub *formă trigonometrică,* adică sub forma $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$este *modulul* numărului complex z, iar $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ este *argumentul* acestui număr complex
Forma exponenţială

Numărul complex a cărui formă trigonometrică este $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$poate fi scris sub *forma exponenţială* $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. Această posibilitate se datorează valabilităţii *formulei lui Euler*.
Conjugatul unui număr complex
Conjugatul complex al unui numar $z = a + bi$este numărul complex $\bar{z} = a - bi$.
Proprietăţile conjugatului complex :
$\bar{\bar{z}} = z$
$\bar{z}\bar{w} = \overline{zw}$
$\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
$\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
Modulul unui număr complexModulul numărului complex $z = a + bi$este numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Proprietăţile modulului:
$|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$(inegalitatea triunghiului)
$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$
$|z_1^n| = |z_1|^n$
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
Are loc identitatea$|z|^2 = z\bar{z}$şi deci $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, dacă $z \neq 0$
$|\pm i| = 1$.
Puterile lui i
$i^2 = -1 => i^3 = i^2 \cdot i = i \cdot (-1) = -i$
$i^3 = -i => i^4 = i^3 \cdot i = i \cdot (-i) = 1$
Generalizare:
$i^n = 1$ cu $n$de forma $4k$
$i^n = i$ cu $n$de forma $4k + 1$
$i^n = -1$cu $n$de forma $4k + 2$
$i^n = -i$ cu $n$de forma $4k + 3$
Reprezentarea grafică a numerelor complexe
Aşa cum unui număr real i se poate asocia un punct de pe o dreaptă, tot astfel, unui număr complex i se poate asocia un punct aflat într-un plan.