Derivarea functiilor compuse

1. Derivarea functiilor compuse:

In acest paragraf vom arata ca prin compunerea unei functii derivabile se obtin tot functii derivabile.

Teorema: Fie I si J integrale din R si functiile $u:I\to J$ *si* $f:J\to R$.
Daca u este derivabila in $x_0 \in J$, iar f este derivabila in $u_0=u(x_0)\in J$, atunci functia compusa $f\circ u:J\to R$ este derivabila in x_0 si $(f\circ u)'(x_0)=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(u(x))-f(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}\cdot\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\right]=\lim\limits_{u\to u_0}\frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}\cdot$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=f'(u_0)\cdot u'(x_0)$

Consecinta: Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezulta ca daca $u:I\to J$ si $f:J\to R$ sunt derivabile , atunci $f\circ u$ este dericabila si $(f\circ u)'=f'(u)\cdot u'$
Derivata unei funcii compuse este produsul derivatelor celor doua functii in ordinea compunerii lor.

Observatie: $(g\circ f\circ u)'=g'(f\circ u)\cdot f'(u)\cdot u'$

Demonstratie.Trebuie probat ca:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Definim functia: F: $J\to R$ astfel:

$$F(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{g'(y_0)}, & \text{daca } y\neq y_0\\ g'(y_0), & \text{daca } y=y_0\end{cases}$$

Evident F este continua in y_0 deoarece:

$$\lim_{y\to y_0}F(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=g'(y_0)=F(y_0)$$

Are loc egalitatea: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x\to x_0}=F(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,daca $x\neq x_0$ (1)

Intr-adevar, daca $f(x)=f(x_0)$, atunci ambrii membri sunt nuli.

Daca

$f(x) \neq f(x_0)$, atunci $f(x) \neq y_0$ si $F(f(x))=\frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0}$ si se constata ca relatia (1) se verifica.

Trecand la limita in (1) dupa $x \to x_0$ avem:

$(g \circ f)'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x \to x_0} = \lim_{x \to x_0} F(f(x))$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$, unde am utilizat relatiile $\lim_{x \to x_0} F(f(x))=F(y_0)=g'(y_0)$ si faptul ca f este derivabila in x_0.

Teorema: Fie I , J intervale si $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} R$ doua functii. Daca f este derivabila pe I si g este derivabila pe J , atunci $g \circ f$ este derivabila pe I si $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$

Observatii: 1) Daca se considera trei functii derivabile $f : I \to J$, $g : J \to K$, $h:K \to R$, atunci functia $h \circ g \circ f : I \to R$ este derivabila si $(h \circ g \circ f)'=h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$ rezultat ce se obtine imediat aplicand corolarul precedent $[h \circ (g \circ f)]'=h'(g \circ f) \cdot (g \circ f)'=h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$

2) Deci: derivata unei functii compuse se obtine inmultind derivatele functiilor care se compun in ordinea compunerii lor.

Exemple: Calculati functia derivata pentru fiecare dintre functiile urmatoare:

1. $f:R \to R$, $f(x)=sin^3 x$

Daca $u(x)=sin\ x$, atunci $f(u)=u^3$ si $f'(u)=3u^2$

$f'(x)=f'(u) \cdot u'(x)=3u^2 \cdot u'(x)=3\ sin^2 x \cdot (sin\ x)'=3\ sin^2 x \cdot cos\ x$

2. $f:R \to$, $f(x)=cos\ x^2$

Daca $x^2=u(x)$, atunci $f(u)=cos\ u$ si $f'(u)=-sin\ u$

$f'(x)=f'(u) \cdot u'(x)=-sin\ u \cdot u'(x)=-(sin\ x^2) \cdot (x^2)=-2x\ sin\ x^2$

3. $f:(-\infty;0) \cup (2;\infty) \to R$, $f(x)=In(x^2-2x)$

Daca $u(x)=x^2-2x$, atunci $f(u)=In\ u$ si $f'(u)=\frac{1}{u}$

$f'(x)=f'(u) \cdot u'(x)=\frac{1}{u} \cdot u'(x)=\frac{1}{x^2-2x} \cdot (x^2-2x)'=\frac{2x-2}{x^2-2x}=\frac{2(x-1)}{x(X-2)}$

2. Consecinte

1. $[u^n(x)]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'(x)$, oricare ar fi $n\in N^*$

2. $[\sqrt[n]{u(x)}\,]'=\dfrac{1}{u\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}\cdot u'(x)$, oricare ar fi $n\in N^*$

3. $[In\ u(x)]'=\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$

4. $[\sin u(x)]'=[\cos u\ (x)]\cdot u'(x)$

5. $[\cos u(x)'=-[\sin u(x)]\cdot u'(x)$

6. $[tg\ u(x)]'=\dfrac{1}{\cos^2 u(x)}\cdot u'(x)=[1+tg^2u(x)]\cdot u'(x)$

7. $[ctg\ u(x)]'=-\dfrac{1}{\sin^2 u(x)}\cdot u'(x)=[-1-ctg^2u(x)]\cdot u'(x)$

- $(x^n)'=nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{u\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $(a^x)'=a^{x\ ln\ a}$
- $(log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln_a}$
- $(ln\ x)'=\dfrac{1}{x}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=\sin x$
- $(tg\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(ctg\ x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

3. <u>Tabel cu derivatele functiilor elementare si ale functiilor compuse:</u>

Nr.	Functia	Derivata	Domeniul de derivabilitate	Functia compusa	Derivata
1.	constanta c	0	R	-	-
2.	$x^n(n\in N^*)$	nx^{n-1}	R	$u^n(n\in N^*)$	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
3.	$x^a(a\in R)$	ax^{a-1}	$(0,\infty)$ pentru $a\in R/Q$	$u^a(a\in R)$	$\propto\cdot u^{a-1}\cdot u'$
4.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$	$\sqrt{u}$ (u>0)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
5.	$a^x(a>0;a\neq 1)$	$a^x \ln a$	R	$a^u(a>0;a\neq 1)$	$a^u\cdot u'\cdot\ln a$
6.	e^x	e^x	R	e^u	$e^u\cdot u'$
7.	ln x	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$\ln u, u\geq 0$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
8.	sin x	cos x	R	sin u	$u'\cdot\cos u$
9.	cos x	-sin x	R	cos u	$-u'\cdot\sin u$
10.	tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$	$tg\, u(\cos u\neq 0)$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
11.	ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x\neq 0$	$ctg\, u(\sin u\neq 0)$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
12.	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(-1,1)	arcsin u $u\in(-1;1)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13.	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	(-1,1)	arccos u $u\in(-1;1)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14.	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	R	arctg u	$\frac{u'}{1+u^2}$
15.	arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	R	arcctg u	$-\frac{u'}{1+u^2}$

4. Exercitii rezolvate

1. $[\ln(5x+2)]' = \frac{(5x+2)'}{5x+2} = \frac{5}{5x+2}$

2. $[\ln(x^2+5x+4)]' = \frac{(x^2+5x+4)'}{x^2+5x+4} = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}$

3. $\left[\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right]' = \frac{\left[\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right]'}{\left[\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right]} = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)' \cdot \frac{2+x}{2-x} = (2-x)' \cdot (2+x) - (2-x) \cdot (2+x)' =$

$$\frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

4. Fie g , $h : R \to R$, $g(x)=x^2+3x+2$, $h(x)=x^3$ pentru care $g'(x)=2x+3$ si $h'(x)=3x^2$.

Sa consideram functia:
$f=h \circ g : R \to R$, $f(x)=(h \circ g)(x)=h(g(x))=(x^2+3x+2)^3$.
Atunci $f'(x)=(h \circ g)'(x)=h'(g(x)) \cdot g'(x)=3g(x) \cdot (2x+3)=3(x^2+3x+2)(2x+3)$

Observatie: in acest exercitiu am ales eu functiile g, h cu ajutorul lor am constituit functia compusa $f=h \circ g$. De obicei in aplicatii se da functia f si ramane in seama cititorului evidentierea functiilor care se compun. Se impune o atentie deosebita la ordinea in care apar functiile in compunere.

5. Sa se calculeze derivatele functiilor compuse (punand de fiecere data in evidenta functiile care se compun):

   1) $f(x)=\sin x^2$, $x \in R$

Functia f este compunerea functiilor $g:R \to R$, $g(x)=x^2$, $h:R \to R$, $h(x)=\sin x$. Atunci :
$f=h \circ g$, $f(x)=h(g(x))=\sin x^2$
Deci $f'(x)=h'(g(x)) \cdot g'(x)=(\cos x^2) \cdot 2x=2x \cos x^2$
Este clar ca h , g sunt derivabile si are loc teorema de la derivarea functiilor compuse.Deci prima functie din compunere este *sin* si apoi functia polinomiala $g(x)=x^2$. Daca gandim functia $f(x)=\sin u(x)$, unde $u(x)=x^2$, atunci $f'(x)=(\sin u(x))'=\cos u(x) \cdot u'(x)=2x \cos x^2$.

$2)\ f(x)=sin^2x\ ,\ x\in R;$

In acest caz trebuie sa evidentiem doua functii: $g:R\rightarrow R$, $g(x)=sin\ x$ si $h:R\rightarrow R$, $h(x)=x^2$(functia putere) , pentru care $g'(x)=cos\ x$, $h'(x)=2x$. Deci:
$f(x)=(h\circ g)(x)$ si $f'(x)=h'(g(x))\cdot g'(x)=h'(sin\ x)\cdot(sin\ x)'=2sin\ x\cdot cos\ x=sin2x$
Analog am putea considera $f(x)=u^2(x)$, unde $u(x)=sin\ x$ si deci $f'(x)=2\cdot u(x)\cdot u'(x)=2sin\ x\cdot cos\ x=sin2x.$

$3)\ f(x)=sin^3(x^2+1)\ ,\ x\in R$

In acest caz avem in compunerea functiilor $g,h,i:R\rightarrow R$, unde $g(x)=x^2+1$, $h(x)=sin\ x$, $i(x)=x^3$ pentru care $g'(x)=2x$, $h'(x)=cos\ x$, $i'(x)=3x^2$ cand
$f(x)=(i\circ h\circ g)(x)=i(h(g(x)))=i(h(x^2+1))=i(sin(x^2+1))=(sin(x^2+1))^3$, adica ordinea in compunere este functia putere , functia *sin* si apoi functia polinomiala.
De aici $f'(x)=i'(h(g(x)))\cdot h'(g(x))\cdot g'(x)=3h(g(x))^2\cdot cos(g(x))\cdot 2x=$
$=3sin^2(x^2+1)\cdot cos(x^2+1)\cdot 2x$

$4)\ f(x)=sin^2x\ ,\ x\in R$

Aici se compune in ordine functia logaritmica $h:(0,\infty)\rightarrow R$, $h(x)=ln\ x$ cu functia polinomiala $g:(0,\infty)\rightarrow(1,\infty)$, $g(x)=x^3+x^2+1$ cu $h'(x)=\frac{1}{x}$ si $g'(x)=3x^2+2x$ cand avem : $f(x)=(h\circ g)(x)$. Deci
$f'(x)=h'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{g(x)}\cdot(3x^2+2x)=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}$
Daca gandim functia f ca fiind $f(x)=ln\ u(x)$ unde $u(x)=g(x)$, atunci
$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1}$

$5)\ f(x)=ln^5x\ ,\ x>0$

Scriind $f(x)=(ln\ x)^5$ se constata usor ca prima functie din compunere este functia putere $h: R\to R\ ,\ h(x)=x^5$, iar a doua functie este $g:(0,\infty)\to R$ $g(x)=ln\ x$ pentru care $h'(x)=5x^4\ ,\ g'(x)=\frac{1}{x}$.

Asadar $f'(x)=[(ln\ x)^5]'=5(ln\ x)^4\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{x}ln^4x$

$6)\ f(x)=ln^3(3x^2+5x)\ ,\ x>0$

Se remarca usor ca in structura functiei sunt trei functii care se compun $g:R\to R\ ,\ g(x)=3x^2+5x$ (functie polinomiala) , $h:(0,\infty)\to R\ ,\ h(x)=ln$ x (functie logaritmica) si in fine $i : R\to R\ ,\ i(x)=x^3$ (functia putere).

Deci $f(x)=(i\circ h\circ g)(x)$. Avem $g'(x)=6x+5\ ,\ h'(x)=\frac{1}{x}\ ,\ i'(x)=3x^2$

Acum este usor de vazut ca :

$$f'(x)=i'(h(g(x)))\cdot h'(g(x))\cdot g'(x)=3ln^2(3x^2+5x)\cdot\frac{1}{3x^2+5x}\cdot(6x+5)$$

Bibliografie:

Manual pentru clasa a XI-a

Volumul I

Elemente de analiza matematica

Editura Mathpress 2002