

Proprietati ale legilor de compozitie

Notiunea de lege de compozitie prezinta un mare grad de generalitate. In definitia unei legi de compozitie φ pe o multime M se ignora atat natura elementelor multimii M cat si modul efectiv in care φ actioneaza pe $M+M$. Singura restricti pusa este ca φ sa asocieze la un cuplu ordonat (x, y) de elemente din M un element $\varphi(x, y)$ din M si numai unul. Din acest motiv studiul legilor de compozitie bazat doar pe definitia lor este foarte sarac in rezultate. S-a dovedit fertila ideea de a studia legi de compozitie ce au proprietati care pot fi semnalate in multe exemple concrete.

Asociativitatea

Vom presupune in continuare ca M este o multime nevida echipata cu o lege de compozitie „*”,

$$M * M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y.$$

Expresia $x*y$ se citeste : x compus cu y sau x stea y .

Definitiiile si rezultatele vor fi date folosind aceasta notatie urmand sa fie facute precizarile ce se impun si in alte notatii pentru legea de compozitie

Fie x, y, z apartinand lui M . Prezenta parantezelor in expresia $(x*y)*z$ cere urmatoarea procedura de calcul: se afla intai compusul lui x cu y si apoi $x*y$ se compune cu z , obtinandu-se in final elementul $(x*y)*z$ care apartine lui M . Prezenta parantezelor in expresia $x*(y*z)$ impune sa aflam intai $y*z$ si sa-l compunem apoi cu x , obtinandu-se astfel elementul $x*(y*z)$ care apartine lui M .

Definitie: O lege de compozitie $M+M$ cu vaori in M , (x,y) cu valori in $x*y$ se numeste asociativa daca:

$$(x*y)*z=x*(y*z), (\forall) x,y,z \text{ apartinand lui } M.$$

Daca legea de compozitie este data in notatie aditiva (multiplicativa) atunci proprietatea de asociativitate a acesteia se scrie:

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

respectiv

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (\forall) x, y, z \text{ apartinand lui } M.$$

Exemple:

1. Adunare si inmultirea numerelor reale sunt legi de compozitie asociative pentru ca:

$$(x+y)+z=x+(y+z) \text{ si } (x \cdot y) \cdot z=x \cdot (y \cdot z).$$

2. Adunarea si inmultirea matricilor din $M_2(\mathbb{R})$ sunt legi de compozitie asociative, caci:

$$(A+B)+C=A+(B+C) \text{ si } (AB)C=A(BC).$$

3. Reuniunea si intersectia partilor unei multimi E sunt legi de compozitie asociative, caci:

$$(XUY)UZ=XU(YUZ).$$

4. Compunerea functiilor unei multimi E in ea insasi este o lege de compozitie asociativa, caci:

$$(f \circ g) \circ h=f \circ (g \circ h).$$

Comutativitatea

Proprietatea de asociativitate largest mult aria posibilitatilor in perfectarea calcului algebric. O alta sursa in acest sens este data de legile de compozitie pentru care produsul a doua elemente oarecare este independent de ordinea in care se face compunerea acestora. Mai precis:

Definitie: O lege de compozitie $M+M$ cu valori in M , (x, y) cu valori in $x*y$ se numeste comutativa, daca:

$$x*y=y*x, (\forall x, y \in M).$$

Adunarea si inmultirea numerelor reale, reuniunea si intersectia partilor unei multimi sunt legi de compozitie comutative.

Numeroase legi de compozitie se definesc cu ajutorul altora deja cunoscute. Asemenea operatii pot prelua unele proprietati de la cele de plecare prin mecanismul dat chiar de definitia lor. Astfel comutativitatea adunarii matricilor din $M_2(\mathbb{R})$ este o consecinta a proprietatii de comutativitate a adunarii numerelor reale. Intradevar, daca A, B apartin lui $M_2(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, atunci:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ a_{21} & \dots & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{12} \\ b_{21} & \dots & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & \dots & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & \dots & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{12} \\ b_{21} & \dots & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ a_{21} & \dots & a_{22} \end{pmatrix} = B+A \end{aligned}$$

Sa observam ca inmultirea matricilor din $M_2(\mathbb{R})$ nu este comutativa, cu toate ca inmultirea numerelor reale este comutativa. Aceasta rezulta din exemplul urmator:

$$\begin{pmatrix} \dots 1 \dots 2 \\ -1 \dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \dots -1 \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \dots 1 \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \dots 0 \\ 0 \dots 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \dots -1 \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots 1 \dots 2 \\ -1 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Deci daca $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Element neutru

Numerele reale 0 si 1 au proprietatile:

$$0+x=x+0=x, (\forall) x \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Daca E este o multime si $1_E: E \rightarrow E$ este aplicatia identica a lui E , atunci:

$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f, (\forall) f \in F(E).$$

De asemenea, pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ avem:

$$0 + A = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{12} \\ a_{21} \dots a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a_{11} \dots 0 + a_{12} \\ 0 + a_{21} \dots 0 + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{12} \\ a_{21} \dots a_{22} \end{pmatrix} = A$$

si analog $A + 0 = A$.

Definitie: *Un element $e \in M$ se numeste element neutru pentru o lege de compozitie $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, daca $e * x = x * e = x, (\forall) x \in M$.*

Teorema: *Daca o lege de compozitie are element neutru, atunci acesta este unic.*

Demonstratie: Fie e si e' doua elemente neutre pentru o lege de compozitie $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$. Avem $e * e' = e'$ caci e este element neutru. De asemenea, $e * e' = e$ caci si e' este element neutru, de unde $e = e'$.

Asadar, elementul neutru, in caz ca exista, este unic determinat.

In notatie aditiva elementul neutru se noteaza de regula cu 0 si se numeste elementul zero, iar in notatie multiplicativa elementul neutru se noteaza cu 1 sau chiar cu e si poarta numele de elementul unitate. Avem

$$0+x=x+0=x, (\forall) x \in M,$$

respectiv

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, (\forall) x \in M.$$

Exemple:

1. Numarul real 0 este elementul neutru al adunarii numerelor reale, numarul real 1 este elementul neutru al inmultirii numerelor reale.

2. Aplicatia identica 1_E a multimii E este elementul neutru al operatiei de compunere a functiilor din $F(E)$.
3. Multimea $2N = \{2k/k \in N\}$ a numerelor naturale pare o parte stabila a lui N in raport cu inmultirea si legea de compozitie indusa de catre aceasta pe $2N$ nu admite element neutru.

Element simetrizabil

Ca si pana acum, Meste o multime nevida inzestrata cu o lege de compozitie

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$$

Vom presupune in plus ca aceasta lege de compozitie este asociativa si ca admite element neutru, fie acesta e .

Definitie: Un element $x \in M$ se numeste simetrizabil in raport cu legea de compozitie (asociativa si cu element neutru) $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, daca exista $x^{-1} \in M$ astfel incat:

$$x^{-1} * x = x * x^{-1} = e.$$

Sa observam ca daca $x^{-1} \in M$ satisface ca si x^{-1} conditiile

$$x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$$

atunci $x^{-1} = x^{-1}$. Intr-adevar

$$x^{-1} = x^{-1} * e = x^{-1} * (x * x^{-1}) = (x^{-1} * x) * x^{-1} = e * x^{-1} = x^{-1}.$$

Daca $x \in M$ este simetrizabil, atunci unicul element $x^{-1} \in M$ cu proprietatea $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$ se numeste simetricul lui x .

In notatia multiplicativa simetricul lui x , in caz ca exista, se noteaza de regula cu x^{-1} si se numeste inversul lui x ; in notatia aditiva se noteaza cu $-x$ si se numeste opusul lui x . Asadar,

$$x^{-1} x = x x^{-1} = 1,$$

respectiv

$$(-x) + x = x + (-x) = 0.$$

Exemple

1. Cum $e * e = e$, rezulta ca elementul neutru este si simetrizabil si simetricul lui e este tot e . In notatie multiplicativa avem $1^{-1} = 1$, iar in notatie aditiva $-0 = 0$.

2. Orice numar intreg este simetrizabil in raport cu adunarea numerelor intregi; numerele intregi simetrizabile fata de inmultire sunt 1 si -1 , $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.

3. Consultand tabla operatiilor induse pentru compunerea functiilor din $F(E)$, unde $E = \{1, 2\}$, se observa ca $e \circ e = e$ si $f \circ f = e$, deci functiile e si f sunt simetrizabile (inversabile) si $e^{-1} = e$, $f^{-1} = f$.

Teorema: Daca $x, y \in M$ sunt elemente simetrizabile in raport cu o lege de compozitie $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$ (asociativa si cu element neutru atunci $x * y$ si x^{-1} sunt simetrizabile. Mai mult:

- 1) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$,
- 2) $(x^{-1})^{-1} = x$

Demonstratie:

Avem:

$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * (x * y)) = y^{-1} * ((x^{-1} * x) * y) = y^{-1} * (e * y) = y^{-1} * y = e$
 si analog $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$. Rezulta ca $x * y$ este simetrizabil si $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
 A doua afirmatie este imediata.

Proprietatile 1) si 2) din enuntul teoremei precedente se transcriu multiplicativ astfel:

$$1) (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}, \quad 2) (x^{-1})^{-1} = x,$$

iar in notatia aditiva

$$1) -(x+y) = (-y) + (-x), \quad 2) -(-x) = x.$$

Se face urmatoarea conventie de notatie

$$x - y \stackrel{def}{=} x + (-y)$$

Aplicatii.

1. Pe multimea Z a numerelor intregi defnim legea de compozitie

$$Z \times Z \rightarrow Z, (x, y) \rightarrow x \circ y = x + y - xy,$$

Numita compunerea circulara. Sa se arate ca legea de compozitie \circ este asociativa si comutativa.

$$\begin{aligned} a) (x \circ y) \circ z &= (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - yz - zx + xyz \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) = x + y + z - xy - yz - zx + xyz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

$$b) \underline{x \circ y} = x + y - xy = y + x - yx = \underline{y \circ x}$$

2. Fie M și N două mulțimi, $*$ o lege de compoziție pe M , \circ o lege de compoziție pe N și $f: M \rightarrow N$ o funcție surjectivă astfel încât

$$f(x*y) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in M.$$

a) Dacă legea de compoziție $*$ este asociativă (comutativă) atunci legea de compoziție \circ este asociativă (comutativă).

b) Funcția $f: Z \rightarrow Z$, $f(x) = 1-x$ are proprietatea

$$f(xy) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in Z$$

unde xy este produsul uzual în Z , iar \circ este compunerea circulară.

a) Fie $u, v, w \in N$.

f surjectivă $\Rightarrow (\exists) x, y, z \in M$ a. i. $u = f(x)$, $v = f(y)$, $w = f(z)$.

$$\underline{u \circ v} = f(x) \circ f(y) = f(x*y) = f(y*x) = f(y) \circ f(x) = \underline{v \circ u}$$

$$\begin{aligned} (\underline{u \circ v}) \circ w &= (f(x) \circ f(y)) \circ f(z) = f(x*y) \circ f(z) = f((x*y)*z) = \\ &= f(x*(y*z)) = f(x) \circ f(y*z) = f(x) \circ (f(y) \circ f(z)) = \underline{u \circ (v \circ w)} \end{aligned}$$

b) $(\forall) x, y \in Z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{f(x) \circ f(y)} &= f(x) + f(y) - f(x)f(y) = 1-x + 1-y - (1-x)(1-y) = \\ &= 2-x-y-1+y+x-xy = 1-xy = \underline{f(xy)}. \end{aligned}$$

3. Fie d un număr întreg liber de pătrate și:

$$H = \left\{ A \in M_2(Q) \mid A = \begin{pmatrix} a & \dots & db \\ b & \dots & a \end{pmatrix}, a, b \in Q, a \neq 0 \dots \text{sau} \dots b \neq 0 \right\}.$$

a) H este o parte stabilă a lui $M_2(Q)$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) (\forall) matrice $A \in H$ este inversabilă în raport cu operația indusă.

a) Fie $A, B \in H$,

$$A = \begin{pmatrix} a & \dots & bd \\ b & \dots & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a' & \dots & db' \\ b' & \dots & a' \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + dbb' & \dots & d(ba' + ab') \\ ba' + ab' & \dots & aa' + dbb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & \dots & db'' \\ b'' & \dots & a'' \end{pmatrix}.$$

$a'' = aa' + dbb' \in Q$, $b'' = ba' + ab' \in Q$

dacă $AB \in H \Rightarrow a'' \neq 0$ sau $b'' \neq 0$.

Pp. $a'' = 0$ și $b'' = 0$

$\Rightarrow x=a$ si $y=b$ sol a sist:

$$\begin{cases} ax + dby = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & db \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - db^2.$$

d este liber de patrata si $a \neq 0$ sau $b \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ caci altfel $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$. Contradic

Dar din $\det A \neq 0 \Rightarrow$ sol sist este $x=y=0$

$\Rightarrow a \neq 0$ sau $b \neq 0$

$\Rightarrow AB \in H$.

b) $I_2 \in H$ si $A \in H$. Arat ca exista $X \in H$

$$X = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{Q}, x \neq 0, y \neq 0$$

a.i. $XA=AX=I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = AX = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + dby & d(bx + ay) \\ bx + ay & ax + dby \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + dby = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 - db^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 - db^2} \end{cases}$$

Cum $a \neq 0$ sau $b \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ sau $y \neq 0$.

Asadar:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - db^2} & \frac{-db}{a^2 - db^2} \\ \frac{-b}{a^2 - db^2} & \frac{a}{a^2 - db^2} \end{pmatrix} \in H$$

Se verifica si egalitatea $XA=I_2$, deci A^{-1} exista si $A^{-1}=X \in H$.

4. Fie $M = N \times N$. Pe multimea M introducem legile de compozitie:

$$(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w),$$

$$(x, y)(z, w) = (xz+yw, xw+yz)$$

oricare ar fi perechile (x, y) si (z, w) din M . Aratati ca aceste legi de compozitie sunt asociative, comutative si cu element neutru.

Asociativitatea:

$$\alpha = (x, y), \beta = (z, w), \gamma = (u, t) \in M.$$

$$\begin{aligned} \text{,,+''' } (\alpha + \beta) + \gamma &= [(x+z, y+w)] + (u, t) = ((x+z)+u, (y+w)+t) = (x+z+u, y+w+t) = \\ &= (x+(z+u), y+(w+t)) = (x, y) + (z+u, w+t) = \underline{\alpha + (\beta + \gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{,,.''' } (\alpha\beta)\gamma &= (xz+yw, xw+yz)(u, t) = \\ &= (xzu+ywu+xwt+yzt, xzt+ywt+xwu+yzu) \\ \underline{\alpha(\beta\gamma)} &= (x, y)(zu+wt, zt+wu) = \\ &= (xzu+xwt+yzt+ywu, xzt+xwu+yzu+ywt) \end{aligned}$$

Comutativitatea:

$$\underline{\alpha + \beta} = (x, y) + (z, w) = (x+z, y+w) = (z+x, w+y) = \underline{\beta + \alpha}$$

$$\underline{\alpha\beta} = (x, y)(z, w) = (xz+yw, xw+yz) = (zx+wy, wx+zy) = \underline{\beta\alpha}$$

Element neutru:

$$(\exists) e_1 \in M \text{ a.i. } \alpha + e_1 = e_1 + \alpha = \alpha, (\forall) \alpha \in M$$

$$e_1 = (0, 0) \quad \alpha + e_1 = (x, y) + (0, 0) = (x, y) = \alpha \Rightarrow e_1 = (0, 0) \text{ el. Neutru pt ,,+'''}$$

$$(\exists) e_2 \in M \text{ a.i. } \alpha e_2 = e_2 \alpha = \alpha, (\forall) \alpha \in M$$

$$e_2 = (1, 0) \quad \alpha e_2 = (x, y)(1, 0) = (x, y) = \alpha \Rightarrow e_2 = (1, 0) \text{ el. Neutru pt ,,.'''}$$

5. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe \mathbb{Z} definim legea de compozitie ,,*''

$$x * y = axy + b(x+y) + c, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Aratati ca * este lege de compozitie asociativa daca si numai daca

$$b^2 - b - ac = 0.$$

b) Cand are loc a) legea de compozitie * are el. Neutru daca si numai daca b/c .

$$a) * \text{ asociativa} \Leftrightarrow (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}, (x * y) * z = x * (y * z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2xyz + abxz + abyz + acz + abxy + b^2x + b^2y + bc + bz + c =$$

$$= a^2xyz + abxy + abxz + acx + bx + abyz + b^2y + b^2z + bc + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall) x, y, z \in \mathbb{Z}, (b^2 - b - ac)x = (b^2 - b - ac)z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall)x, y, z \in \mathbb{Z}, \dots (b^2 - b - ac)(x - z) = 0 \Leftrightarrow b^2 - b - ac = 0$$

b),,, \Rightarrow '' $(\exists) e \in \mathbb{Z}$ a.i. $x * e = e * x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x * e = x$$

$$axe + b(x + e) + c = x$$

$$(ae + b - 1)x + be + c = 0$$

$$\Rightarrow ae + b - 1 = 0 \text{ si } be = -c \Rightarrow e = -c/b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \text{ divide pe } c.$$

,, \Leftarrow '' $(\exists) k \in \mathbb{Z}$ a.i. $c = kb$, $(\forall), x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \underline{x * (-k)} &= -axk + b(x - k) + c = x(-ak + b) + c - kb = x(-ac/b + b) = \\ &= x(b - ac)/b = xb/b = \underline{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow -k$ el. neutru.

6. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y = xy + 2ax + by.$$

Determinați a și b astfel încât legea de compoziție să fie comutativă și asociativă.

* comutativă

$$\Rightarrow x * y = y * x \Leftrightarrow xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx$$

$$\Leftrightarrow 2a(x - y) = b(x - y)$$

$$\Leftrightarrow \underline{2a = b}$$

* asociativă

$$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= [xy + bx + by] * z = xyz + bxy + byz + b(xy + bx + by + z) = \\ &= xyz + bxz + byz + bxy + b^2x + b^2y + bz. \end{aligned}$$

$$x * (y * z) = x * [yz + by + bz] = xyz + bxy + bxz + bx + byz + b^2y + b^2z.$$

$$\Rightarrow b^2x + bz = b^2z + bx$$

$$b^2x - b^2z + bz - bx = 0$$

$$b(b - 1)(x - z) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ sau } b = 1$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 0$$

$$a = 1/2, b = 1.$$

7. Pe $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} / a > 0\}$ definim legile de compoziție:

$$a \perp b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a + b}{2} \dots (\text{media aritmetică})$$

$$a \text{ T } b \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{ab} \dots (\text{media geometrică})$$

$$a \nabla b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2ab}{a + b} \dots (\text{media armonică})$$

Aratati ca aceste legi de 3 compozitie sunt comutative si nu sunt asociative.
Admit element neutru?

Comutativitatea

$$\perp : (a \perp b) \perp c = \frac{a+b}{2} \perp c = \frac{b+a}{2} \perp c = c \perp \frac{a+b}{2} = c \perp a$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \perp c = \frac{b+a}{2} \perp c = c \perp \frac{a+b}{2} = c \perp a$$

$$\frac{a+b}{2} \nabla c = \frac{2ab}{a+b} \nabla c = \frac{2ba}{b+a} \nabla c = c \nabla \frac{a+b}{2} = c \nabla a$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \nabla c = \frac{2ba}{b+a} \nabla c = c \nabla \frac{a+b}{2} = c \nabla a$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{2}{2}$$

$$\dots \Leftrightarrow a + b + 2c \neq 2a + b + c$$

$$\dots \Leftrightarrow a \neq c$$

$$\top : (a \top b) \top c \neq a \top (b \top c)$$

$$\dots \Leftrightarrow \sqrt{ab} \top c \neq a \top \sqrt{bc}$$

$$\dots \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{ab} \cdot c} \neq \sqrt{a \cdot \sqrt{bc}}$$

$$\dots \Leftrightarrow a \neq c$$

$$\nabla : (a \nabla b) \nabla c \neq a \nabla (b \nabla c)$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \nabla c \neq a \nabla \frac{2bc}{b+c}$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{\frac{2abc}{a+b}}{\frac{2ab}{a+b} + c} \neq \frac{\frac{2abc}{b+c}}{a + \frac{2bc}{b+c}}$$

$$\dots \Leftrightarrow \frac{2abc}{2ab + ca + cb} \neq \frac{2abc}{ab + ac + 2bc}$$

$$\dots \Leftrightarrow 2ab + ca + cb \neq ab + ac + 2bc$$

$$\dots \Leftrightarrow ab \neq bc$$

$$\dots \Leftrightarrow a \neq c$$

Non asociativitatea

Element neutru:

$$\perp : (\exists) e \in \mathbb{R} \text{ a.i. } a \perp e = e \perp a = a, (\forall) a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (a+e)/2 = a$$

$$\Rightarrow a+e = 2a$$

$$\Rightarrow e = a \text{ fals, } a \text{ variabil, } e \text{ unic.}$$

$$\top : (\exists) e \in \mathbb{R} \text{ a.i. } a \top e = e \top a = a, (\forall) a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a \top e = a$$

$$\Rightarrow \sqrt{ae} = a \uparrow^2$$

$$\Rightarrow ae = a^2$$

$$\Rightarrow ae - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(e - a) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0, \text{ contra } a \neq 0 \text{ ipoteza}$$

8. Pe $M_2(\mathbb{R})$ se definește legea de compoziție *

$$A * B = AB + BA, \quad (\forall) A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

Studiati dacă legea de compoziție * este asociativă, comutativă și dacă admite element neutru.

asociativitatea

$$(A * B) * C = (AB + BA) * C = ABC + BAC + CAB + CBA$$

$$A * (B * C) = A * (BC + CB) = ABC + ACB + BCA + CBA$$

$$(A * B) * C \neq A * (B * C)$$

\Rightarrow * nu este asociativă

comutativitatea

$$A * B = AB + BA = BA + AB = B * A$$

\Rightarrow * este comutativă

el. neutru

$$(\exists) E \in M_2(\mathbb{R}) \text{ a.i. } A * E = E * A = A, \quad (\forall) A \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A * E = A$$

$$\Rightarrow AE + EA = A$$

$$\Rightarrow E = I_2/2.$$

9. Fie $n > 0$ un număr întreg și

$$M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1\}$$

a) Dacă $(a, b), (c, d) \in M \Rightarrow (ac, ad + bc) \in M$

b) Legea de compoziție * definită pe M prin:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$$

este comutativă și asociativă.

c) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.

a) $(a, b) \in M; (c, d) \in M; a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$(a, n) = 1 \Rightarrow (c, n) = 1$$

$$a \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \in \mathbb{Z} \Rightarrow (ac, n) = 1$$

$$a \in \mathbb{Z}; d \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ad + bc \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (ac, ad + bc) \in M$$

b) $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc) = (ca, cb + da) = (c, d) * (a, b)$

\Rightarrow * este comutativă

$[(a, b)*(c, d)]*(g, h)=(ac, ad+bc)*(g, h)=(acg, ach+adg+bcg)$
 $(a, b)*[(c, d)*(g, h)]=(a, b)*(cg, ch+dg)=(acg, ach+adg+bcg)$
 $\Rightarrow *$ este asociativa

c) el. neutru

$(\exists) e=(x, y) \in M$ a.i. $(a, b)*(x, y)=(x, y)*(a, b)=(a, b)$, $(\forall) (a, b) \in M$

$$(a, b)*(x, y)=(a, b)$$

$$(ax, ay+bx)=(a, b)$$

$$\Rightarrow ax=a \Rightarrow \underline{x=1}$$

$$\Rightarrow ay+bx=b \Rightarrow ay+b=b \Rightarrow ay=0 \Rightarrow \underline{y=0}$$

$$\Rightarrow (x, y)=(1, 0)$$

el. simetrizabil

$(\forall) (a, b) \in M$, $(\exists) (a', b') \in M$ a.i. $(a, b)*(a', b')=(1, 0)$

$$(aa', ab'+ba')=(1, 0)$$

$$\Rightarrow aa'=1 \Rightarrow a'=1/a \quad a' \in Z \Rightarrow a'=\pm 1$$

$$\Rightarrow ab'+ba'=0 \Rightarrow b'=b$$

$$\Rightarrow \underline{(a', b')=(\pm 1, b)}$$