

Numarul phi si sirul lui Fibonacci

Cuprins

1. Phi si phi – Proportia divină.
2. Despre numărul de aur (Phi si phi)
3. Numărul de aur si Fibonacci 3
4. Reprezentare grafică – dreptunghiuri de aur.
5. Alte siruri care tind la Phi
6. Câteva curiozități despre Phi ai phi
7. Anexa nr. 1.
8. Reprezentarea grafică.
9. Anexa nr. 2.
10. Programul sursă C++ ce creează reprezentarea grafică (din anexa 1)
11. Anexa nr. 3.
12. Numărul Phi cu 20.000 de zecimale.
13. Bibliografie.

Despre numărul de aur (Phi si phi)

Să începem cu o problemă de estetică. Să considerăm un segment de dreaptă. Care este cea mai „plăcută” împărțire a acestui segment în două părți ? Unii ar spune că în două jumătăți, alții ar spune că în proporție de 3:1

Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc „simetrie dinamică”). Dacă părții stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u=1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v=0,618\dots$ Despre un segment partitionat astfel spunem că este împărțit în Secțiunea (sau Proportia, Diviziunea) de aur (divină).

Care este justificatia pentru înzestrarea acestei proportii particulare cu un asemenea statut aparte ? Ideea este că lungimea u reprezintă aceeași parte din tot segmentul $(u+v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u . Cu alte cuvinte :

$$\frac{u}{u+v} = \frac{u}{v}$$

Dacă notăm $\Phi=u/v$, vom rezolva ecuația pentru Φ , observând că :

$$1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \Phi$$

Rădăcina pozitivă a ecuației, care se poate scrie

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

este :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$$

o constantă care este numită Numărul de aur sau Proportia divină.

Dacă presupunem $u=1$, atunci

$$v = \frac{u}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.6180339887\dots$$

, cum am presupus mai devreme. Notăm numărul $v = 0.6180339887\dots = \Phi$ (phi).

Numărul de aur si Fibonacci

Afirmăm că numărul nostru Phi este strâns legat de sirul lui Fibonacci. Pentru cei care nu știu, sirul lui Fibonacci este definit prin :

$$f_0=0; f_1=1; f_n= f_0+ f_1 \text{ (oricare } n \geq 2).$$

Acest sir exprimă (într-un mod naiv) creșterea populației de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată și sunt unul de sex masculin și unul de sex feminin.

În felul acesta, numărul de perechi de iepuri existente după n luni ar trebui să fie f_n . Vă puneti întrebarea ce poate avea în comun Φ cu sirul lui Fibonacci ? Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii. Pentru început să observăm că :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Φ este o fracție infinită.

Acum să privim fracțiile parțiale :

$$1 = \frac{1}{1} \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

Toate rezultatele fractiilor sunt rapoarte de numere Fibonacci succesive, fapt ce „motivează” teorema ce spune că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n se apropie de infinit, raportul termenilor al $n+1$ -lea și al n -lea din sirul lui Fibonacci se apropie de Φ . Această teoremă este valabilă pentru orice secvență arbitrară ce satisface recurența :

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (oricare $n \geq 2$), cu proprietatea că primii doi termeni sunt diferiți.

Reprezentare grafică – dreptunghiuri de aur

Legătura geometrică dintre numărul Phi și numerele lui Fibonacci poate fi văzută în graficul din anexa 1. Pornind de la un dreptunghi de aur (de lungime Φ și lățime 1), urmează un sir natural de „cuibăriri” ale dreptunghiurilor divine în cel inițial.

Lungimea și lățimea celui de-al n -lea dreptunghi de aur pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienții sunt întotdeauna numere Fibonacci. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică, așa cum arată imaginea. Să presupunem că punctul din colțul din stânga jos al primului dreptunghi este originea unui sistem rectangular de coordonate. Apare acum întrebarea : unde se află punctul spre care tinde spirala?

Răspunsul este : spirala tinde spre punctul de coordonate

$$(x_\infty, y_\infty) = \left(\frac{1 + 3 \cdot \Phi}{5}, \frac{3 - \Phi}{5} \right)$$

Asemenea spirale logaritmice sunt echiangulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul (x_∞, y_∞) taie spirala sub un unghi constant. În sensul acesta, spunem că spirala este o generalizare a cercului, unde unghiul este de 90°. Spirala noastră are un unghi

$$\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{2}{\pi} \ln(\Phi)\right) = 72.968\dots^\circ$$

Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des și în natură. De exemplu carcasa unui melc, colții unui elefant sau conurile de pin au formă de spirală.

Altă aplicație geometrică a numărului Phi apare la desenarea unui pentagon regulat fără cerc și compas. Aceasta este legată de faptul că

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \Phi$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3 - \Phi}$$

Alte siruri care tind la Phi

La fel de simplu cum Φ este o fracție infinită, tot așa poate fi și un

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

radical infinit :

$$\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \cdot \ln(\Phi) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \dots$$

Iată altă serie infinită legată de Φ :

Dintre multe alte expresii posibile ce se apropie de Φ următoarele două sunt mai cunoscute :

$$\frac{1}{\alpha - \Phi} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \pi}{5}\right) = 1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \frac{e^{-10\pi}}{1 + \dots}}}}}$$

$$\frac{1}{\beta - \Phi} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{5}}\right) = 1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-10\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}}}$$

unde

$$\alpha = (\Phi \cdot \sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[3]{\alpha' - 1}}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [(\Phi - 1) \cdot \sqrt{5}]^{\frac{5}{2}}$$

Câteva curiozități despre Phi și phi

Un prim fapt ce „sare în ochi” și este cel puțin curios îl constituie relația simplă între Φ , π și e :

$$\Phi = \frac{7}{5} \cdot \frac{\pi}{e}$$

Pare într-adevăr ciudat cum trei numere irrationale se „leagă” printr-o expresie atât de simplă, însă matematicienii au demonstrat că așa stau lucrurile și vrem sau nu trebuie să-i credem. Cine nu crede poate folosi un calculator electronic pentru a face niște calcule simple cu vreo opt zecimale și va fi uimit rezultate.

Coincidențele nu se opresc însă aici. Să considerăm următorul sir :

$$f_0 = 0.6180339887\dots; f_1 = 1.000; f_2 = 1.6180339887\dots; f_3 = 2.6180339887\dots;$$

$$f_n = f_0 + f_1 \text{ (oricare } n \geq 2 \text{)}.$$

Din definiția sirului se observă că oricare doi termeni consecutivi adunați dau ca rezultat pe următorul. Este însă nevoie de un ochi ager pentru a observa că prin înmulțirea oricărui termen cu $\Phi = 1.6180339887\dots$ va rezulta termenul imediat următor.

Asadar $f_{n+1} = f_n \cdot \Phi$. Prezentăm acum câteva egalități simple cu Φ și ϕ :

$$\Phi \cdot \phi = 1$$

$$\Phi - \phi = 1$$

$$\Phi + \phi = \sqrt{5}$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

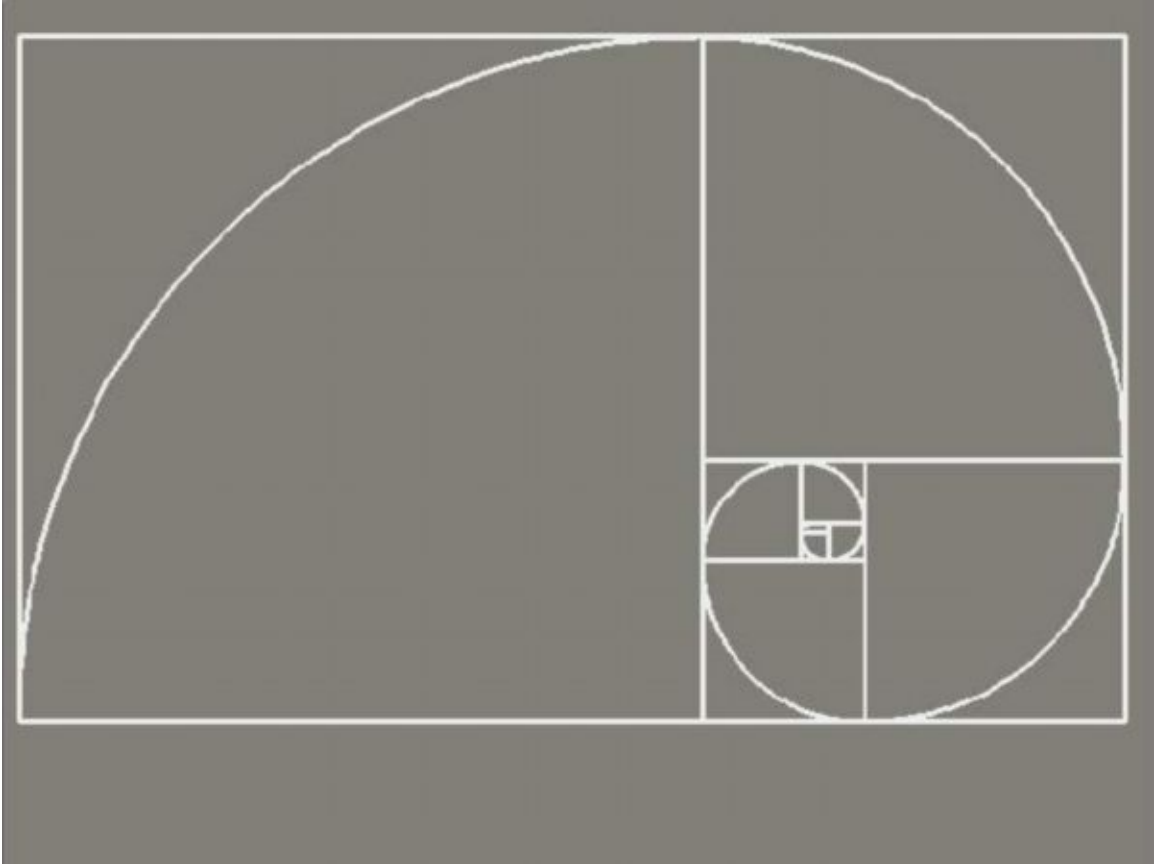
$$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$$

$$\frac{\Phi}{\phi} = \Phi + 1$$

$$\frac{\phi}{\Phi} = 1 - \phi$$

Anexa nr. 1

Reprezentarea grafică



Anexa nr. 2

Programul sursă C++ ce creează reprezentarea grafică (din anexa 1)

```
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <graphics.h>
int x31,x32,y31,y32;
void rect1 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
```



```

    arc(x1+y2-y1,y2,90,180,y2-y1);
    }
void rect2 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x1,y1+x2-x1,0,90,x2-x1);
}
void rect3 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x2-y2+y1,y1,270,360,y2-y1);
}
void rect4 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x2,y2-x2+x1,180,270,x2-x1);
}
void gold(int n)
{ int i,j,k,l;
  for(i=1;i<n;i++)
  { if (i%4==0) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect1(x31,y31,x32,y32-x32+x31); y32=y32-x32+x31; }
    else break;
  if (i%4==1) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect2(x31+y32-y31,y31,x32,y32); x31=x31+y32-y31; }
    else break;
  if (i%4==2) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect3(x31,y31+x32-x31,x32,y32); y31=y31+x32-x31; }
    else break;
  if (i%4==3) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect4(x31,y31,x32-y32+y31,y32); x32=x32-y32+y31; }
    else break;
  } }
void main()
{ int n;
  int gdriver=DETECT,gmode;
  initgraph(&gdriver,&gmode,"");
}

```

```

x31=10;
y31=20;
x32=625;
y32=400;
cout << "Introdu numarul de dreptunghiuri pe care sa le desenez : ";
cin >> n;
cleardevice();
setbkcolor(0);
rect1(x31,y31,x32,y32);
gold(n);
getch();
closegraph();
}

```

Anexa nr. 3

Numărul Phi cu 20.000 de zecimale

1.618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448
6227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521
2663386222353693179318006076672635443338908659593958290563832
2661319928290267880675208766892501711696207032221043216269548
6262963136144381497587012203408058879544547492461856953648644
4924104432077134494704956584678850987433944221254487706647809
1588460749988712400765217057517978834166256249407589069704000
2812104276217711177780531531714101170466659914669798731761356
0067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778
3478458782289110976250030269615617002504643382437764861028383
1268330372429267526311653392473167111211588186385133162038400
5222165791286675294654906811317159934323597349498509040947621
3222981017261070596116456299098162905552085247903524060201727
9974717534277759277862561943208275051312181562855122248093947
1234145170223735805772786160086883829523045926478780178899219
9027077690389532196819861514378031499741106926088674296226757
560523172775203536139362107673893764556060605921658946675955
1900400555908950229530942312482355212212415444006470340565734
7976639723949499465845788730396230903750339938562102423690251
3868041457799569812244574717803417312645322041639723213404444

9487302315417676893752103068737880344170093954409627955898678
7232095124268935573097045095956844017555198819218020640529055
1893494759260073485228210108819464454422231889131929468962200
2301443770269923007803085261180754519288770502109684249362713
5925187607778846658361502389134933331223105339232136243192637
2891067050339928226526355620902979864247275977256550861548754
3574826471814145127000602389016207773224499435308899909501680
3281121943204819643876758633147985719113978153978074761507722
1175082694586393204565209896985556781410696837288405874610337
8105444390943683583581381131168993855576975484149144534150912
9540700501947754861630754226417293946803673198058618339183285
9913039607201445595044977921207612478564591616083705949878600
6970189409886400764436170933417270919143365013715766011480381
4306262380514321173481510055901345610118007905063814215270930
8588092875703450507808145458819906336129827981411745339273120
8092897279222132980642946878242748740174505540677875708323731
0975915117762978443284747908176518097787268416117632503861211
2914368343767023503711163307258698832587103363222381098090121
1019899176841491751233134015273384383723450093478604979294599
1582201258104598230925528721241370436149102054718554961180876
4265765110605458814756044317847985845397312863016254487611485
2021706440411166076695059775783257039511087823082710647893902
1115691039276838453863333215658296597731034360323225457436372
0412440640888267375843395367959312322134373209957498894699565
6473600729599983912881031974263125179714143201231127955189477
8172691415891177991956481255800184550656329528598591000908621
8029775637892599916499464281930222935523466747593269516542140
2109136301819472270789012208728736170734864999815625547281137
3479871656952748900814438405327483781378246691744422963491470
8157007352545707089772675469343822619546861533120953357923801
4609273510210119190218360675097308957528957746814229543394385
4931553396303807291691758461014609950550648036793041472365720
3986007355076090231731250161320484358364817704848181099160244
2523271672190189334596378608787528701739359303013359011237102
3917126590470263494028307668767436386513271062803231740693173
3448234356453185058135310854973335075996677871244905836367541
3289086240632456395357212524261170278028656043234942837301725
5744058372782679960317393640132876277012436798311446436947670
5312724924104716700138247831286565064934341803900410178053395
0587724586655755229391582397084177298337282311525692609299594

2240000560626678674357923972454084817651973436265268944888552
7202747787473359835367277614075917120513269344837529916499809
3602461784426757277679001919190703805220461232482391326104327
1916845123060236278935454324617699757536890417636502547851382
4631465833638337602357789926729886321618583959036399818384582
7644912459809370430555596137973432613483049494968681089535696
3482817812886253646084203394653819441945714266682371839491832
3709085748502665680398974406621053603064002608171126659954199
3687316094572288810920778822772036366844815325617284117690979
2666655223846883113718529919216319052015686312228207155998764
6842355205928537175780765605036773130975191223973887224682580
5715974457404842987807352215984266766257807706201943040054255
0158312503017534094117191019298903844725033298802450143679684
4169479595453045910313811621870456799786636617460595700034459
7011352518134600656553520347888117414994127482641521355677639
4039071038708818233806803350038046800174808220591096844202644
6402187705340100318028816644153091393948156403192822785482414
5105031888251899700748622879421558957428202166570621880905780
8805032467699129728721038707369740643566745892025865657397856
0859566534107035997832044633634648548949766388535104552729824
2290699848853696828046459745762651434359050938321243743333870
5166571490059071056702488798580437181512610044038148804072524
4061642902247822715272411208506578883871249363510680636516674
3222327767755797399270376231914704732395512060705503992088442
6037087908433342618384135970781648295537143219611895037977146
3000755597537957035522714493191321725564401283091805045008992
1870512118606933573153895935079030073672702331416532042340155
3741442687154055116479611433230248544040940691145613987302603
9518281680344825254326738575900560432024537271929124864581333
4416985299391357478698957986439498023047116967157362283912018
1273129165899527599192203183723568272793856373312654799859124
6327503006059256745497943508811929505685493259355318729141801
1364121874707526281068698301357605247194455932195535961045283
0314883911769301196585834314424894898565584250834109429502771
9758335224429125736493807541711373924376014350682987849327129
9751228688196049835775158771780410697131966753477194792263651
9016339771284739079336111191408998305603361060987171783055435
4035608952929081846414371392943781356048203894791257450770755
7510300242072662900180904229342494259060666141332287226980690
1459945119954780163991514126125257282806643312616574693881951

0644216738718000110042184830258091654338374923641183888564685
1431500637319042951481469424314608952547072037405566913069220
9908048194529751106504642810541775525909518713188835914765996
0413179602094153085855332387725380232727632977372143127968216
7162344211832018028814127474431688472184593927814354740999990
7223320305926297661123832798331698825393126200650370288447828
6669404473079471047612558658375298623625099982323359715507233
8383324408152577819336426263043302658958170800451278873115935
5877472172564947000516366725771539209840950327451121536873009
1219962952276591316370939686072713426926231547533043799331658
1107369643142171979434056391551210810813626268885697480680601
1691894175027229874158699179145349946244419401219785860137366
0828690722365147713912687420966513787562059185432888834174292
0901563133283193575622089713765630978501563154982456445865424
7929357228287506084814533513521817295879329911710032476222052
1946451053624505129884308713444395072442673514628617991832336
4598369637632722575691597239543830520866474742381511079273494
8369523964792689936983249179995027895000604596613134633630249
4995148080532901790297518251587504900743518798351183603272277
2601717404535571658855578297291061958193517105548257930709100
5763586990192972179951687311755631444856481002200142545405542
9273458837116020994794572082378043687189448056368918258024449
9631878342027491015335791072733625328906933474123802222011626
2771193085448502954191320040099986556665177566409536561978978
1838045103035651013158945890287186108690589394713680148457001
8366495647203294334374298946427412551435905843484091954870152
3614031739139036164401984550510491211697920012019996050699496
6403035086369290394100701945053201623487276323273244943963048
0890554251379723314751852070910250636859816795304818100739424
5317002388047598343234504142584314063612721096022824233782280
9027976596077710849391517488731687771352239009117117350918600
6546200990249758527792542781659703834950580106261553336910937
8465977105297502231730741217783441894118459658610298018778742
7445638669661277245038458605264151030408982577775447411533207
6407588167751497553804711629667771005876646159549677692705496
2393985709255070274069978140843124965363071866533718060587422
4259816530705257383454157705429216299811491750861131176577317
2095615656478695474489271320608063545779462414531066983742113
7981689638235333044778831693397287289181036640832698569882544
3851667586228993069643468489751484087903964760420361020602171

7394470263487633654393195229077383616738981178124248365578105
0341694515636260430036657431084766548777801285779236454185224
4723617137422925584159313561286637167032807217155339264632573
0673063910854108868085742838588280602303341408550390973538726
1345119629264159952127893113544314601527309025538271043259662
2674390374556361228613907831943357059003814870089866131539819
5857442330441970856696722293142730741384882788975588860799738
7044702031668348569419909654802982493198176579268298556297230
1068277723516274078380743187782731821191969528005160879157212
8826337968231272562870001500182929757729993579094919640763442
8615757135444278983830404547027101945800425820212023445806303
4503365814721854920367998997293535391968121331951653797453991
1149424445183033858841290401817818821376006659284941367754317
4516054093871103687152116404058219344712044827759605416948645
3987832626954801391501903899593130670318661670663719640256928
6713887146631189192685682691995276457997718278759460961617218
8681094546515788691224106098141972686192554787899263153594729
2282508054251690681401078179602188533076230556381631640192245
4503257656739259976517530801427160714308718862859836037465057
1342046700834327542302770477933111836669032328853068738799071
3590074030490745988951364768760867844323824821893061757031956
3803230819719363567274196438726258706154330729637038127515170
4060050575948827238563451563905265771042645947604055695095984
0888903762079956638801786185591594411172509231327977113803294
3765475090165169496509916073833937715833230245701948347400070
4376186719984834016318260084626196562846491182256888575213463
7549025418083382138352224525872678937950537591560357945469850
9102256225455003017571049469833483545323835260787092219304581
7823060123707532806783685413065846367888664334862493680101987
8279963067025954326513780600738639290856483087415761874189734
5848450141889765293411013722158643559915527113623322003526677
8591598902314461633210265196659076320615243837476190495315829
6883626504209484010565458913062982771724980964195947234046511
0419821347689354018038256954956286039244264159867485982280060
3538628391662012528266074933061965849651999794193932260172357
1073364253708303301143362498575363597042444647599899995085504
1354977558585934576590926533307252775416758431466936767806170
3501200384487488382337603440775159477812218830709000873866273
6209166079905022698927032189976037950989059108591039296734561
4610700304581921273892599269610621167643642438350141020408632

1499178152979681522379832242737536570085534699796554138590503
2683616022278847554706269843910885210302076860470680455684656
0491686498860616222952323907098092629302337956482179981632645
8278888776745208463719710634789231066754693550476151977816990
2588184040792751090182448278705250597698375351430622445090220
2382439823125505841623207188319300693606464682096595006549290
1097161865263672161074171361837766733279756268548012456576827
9031760394655539452314338756773034979157858859101166374845567
5847952713918608782540104233329857442747118969610485126401975
0435990920766215589986607368376231883588450812929501146653548
2817144846405686524654090781547161962578446957526256945516560
1519164029217988548909373280314651922247590030965715490505361
0437768687726191595284492046478689734737085984138451316211929
7201263424077369454598186502965923353451256845497454112981973
5876670728601616056204230636066130281496773445797737750557564
6654752563226481771169978570871228315431045691232625034976811
5245217449739613674882204648051968875434196951193312045021605
1429384844754523821270143830957855813619678302310685080845876
9520590532946833849047120991625563650340034396708289336983674
2300157511738515126912306617227641442160751291734187471431509
3241924914160969998672815823859257359823894849274919646152272
2733387463121384362621163794670620326302250554895805730837504
6129923113629917306948940734258831948399927416395098443963405
7635284717562762192786522539608720131080486406534396168875452
5342630989695176190197709631922587093421659559744717501575383
7674152228057065028068314335652491719973335840306415355075911
5974264366482846628136802174505909705894602744292632222215459
4507580465712060686399043082369396932082374907675611901715613
0542481331171524256847846336377001520441791650116823257523616
0495749706390822443444510351219048819830276001766809850965245
4390071990980349930268606755238796852921947323933523700866502
2140746455403722234348167574937314464092837900653919677401035
5861936181566836616864892395554961452826472894994160615803045
8678914619717281554511000566605424996919741027987405932764349
5371452516769462069859788094695017473022841427571887194092120
9137994059430370504364838600434645227993302923901865922689874
9921132565605578401423354260589510562036907202893931592044047
6835927636479960059640486076198915929819495087878602766345990
5404263770045900803279434720629825445256356479542992488198646
1361713144857734699534755771554913842392894017540341399738461

6948129347924223460974301962752301382860722449638095383840152
6567819764507588547855155492345234781646033062938842009950803
2601409183025743857706710252272436669059889085450155707542303
1666592472352892470258862479488754625276572728515111287827067
3454310244515233456542284311039679528296250193698939983473961
7639880957354152601453729646814738218436005210994721194165914
9471670520379225520963364584846804144778030216472862399926404
8363508773747824501638200895240322534379925790129265640155537
7540917517044196272850391266959566648772429676603673034536687
3404907914188694521471582790815723396912403998586939085517307
9801955546128513408912061084012213617070570430060569246855916
4688347733208568914126794284480413846828132569291481601097862
7269686686737391711893146226913489458042778989960814470952476
2905019260311649206867743318661546966896601822663578788750608
8562435626789327973546339041821087746380392162447720256726995
9639182468778845549717903851583920474831990312762243706623509
2518775434140107112335865907748122063763459019884225472727655
2905043995025244403911365826708133005805882094603102082613413
6912757293699289302996173089284367031523858975398738893680744
1526373794240506448764171768613552343269865728970463069180174
2779721738898594432848520572575883375638201505467206516742526
8189485167332804630764781329313260289322936604521021318981298
7661526244487486693890406178469916665417485084597970146178215
8450149195721098250892345174745122543273868197258649445880837
7139868506598408545773165416917406705211194916628633773226375
3475666370022120327524389997736006074042702972203634778048298
8348551895250794746055199403401107711697256442610050920598433
6253584706959718576261677663021174787834197564450183804102920
3240408826617344339090263522350506828582854432839618480925376
1308201156268699079991170847555869821503100735632404219885695
8420068243992695378440320222237462814765923060554747693683057
6549677690471159625502474507809624837449908025613750915622359
0810105344939417742942770914451666687004152285446380766153511
4155648785493601138747310382877331338839170964617482906315678
8065182761765798535021665998607464012674884121130098549938337
1060319625067027975243101193773355485370116946748588883630803
3328773957165627534036727218070562256232637414883349928997025
8977299224036941750743427314194157432466794578586039894075097
3563636888156721596763543806655939389343820759840612160643176
6442190267777379914557994503146870871626622652413359056992849

4006372744908821635242948022566330458553636337251762049074624
0629389623906220304248726884323776317335742057539975743735084
0965779218088008942059066257278230769278865644556375801266728
0952527379828030076636976928164844651277473822397061738567507
1466927482203748811225639940752276264649946584636740195599737
0283839311988482233553996497833316500846749125452295651240939
0963784095416901234675375280139080830863022653352387069273071
9846546494549791011342871546366955434374621543918865260853669
7436653058856216441164806891283735779434153060947845727098703
7976921346205969538843826760827659181773627669918727803754219
9541724283357910645206137368847085451658221931586453770183134
0181882725109992291761471186052917655142288112356621724169268
0620648845317615164272953585798375412375876100415475805595730
1224592767118952773338233560433742013213928043170533794636464
2835199301457670649184770776895988542164797337176962594393864
8074893633201098893643528324494132569317438323509258286421276
2094734328799843871982916250358863688574408960916197675530236
3614784018627182770889136039893307729306029671776025841803013
3475474406093218222662077059842476082637941388598601935208959
8219418857238237142719303493545182401126710460730974126812790
7272643868568154472914482676138994509206409879264769257469881
2334642995267308237405720406143748700867048612599590178424976
8458447368248279478247531763381748147995710312033963452267434
1512372232245462654632835356424662778646083987217912784308964
1636422237152822199860850600158245169478318926060165827491142
7749335028655037276910681075578264633403992192226022085909678
4186001385965387726582624465759769406924054180444473847160790
1449743018055889337623761296918229234768453759556468421122698
7316375062499711822914856896044725277600939343435583391951651
3298562364589314910186084968348033809093273626106205479597042
1298669883573560404347128399801249802209466851093490407878450
1021176842763450791376876097469006657596830435192666765639609
2264884567021285074482118483610290768919649340230064175317348
3914758916672023069245347107627719792524997328576890388680141
7803137994836510895272209465913045066566582585391746904868726
4990254676596659916454736513425975557739734850652843997738449
0513905829430130008366961455669748537793407881277215791487210
7192588690892778787329829822145742332732659879827569508988453
0624022303648634772296705652412703588783028194007498057543901
6285786745531327197652607107643153112391526077219362144346096

0897587269342236743316137185745776081177515180696621047955851
4013006970184500702629047949257083712017527937855495762739124
5587148332010170361840521636818017341425089806160634676330850
5041845858166293340934791991036859130537894821586517011812101
1333000669577523278668551807825675283614949492074583733684581
3691407977595925267273966423478746614399819648081036705066005
2382691650551446347111168674281773195025606429516379596594756
4498789146144692593662930936480481617405980821425434052521137
1332408113913579971622858101419103410460569290782498956214560
0410456922214168308932366625176186962717194538549985514842751
7336924120268015992808320145830075448474233126438780847808505
6104304909999364345905195187494843696772757473359670883349609
1574474357503986020163976661142765369526704411552001939148429
3460101512953117445887648307037167739615426559139908303757766
3021309908712719887069032930470124105861506399852998141757804
3034808035882032020110476070047557101694234120341089156439478
2530316459373043755819468675253495323013027678235356011664131
1177996099793662043449569683547930754311327558643189731515171
0644321892497932778012649647644754670781658074061312593752718
4740881611547981830781675104780929141395456463116058126905175
3953556915775580410671981231638405277556052272223764711883233
2230995850689710187175047819065334948584232597622565758418985
2914471783351732260298578629294346505636693216262767381624595
7417932698892327220666636081992490988831468529940991386734446
0496708424429782436302329389103559656017399422019886902572454
7140163300961214618720836510868818533406062201709951582707044
2337042180176696349133695996064322005328873494893135966030424
38080456594474333567831672703729636367594216999379522

Bibliografie

1. „The Golden Mean” – S. Finch (1999)
2. „A series representation for the Golden Mean” – B. Rossele (1999)
3. „Fibonacci Numbers and the Golden Section” – R. Knott (1997)

4. „Related e-messages” – R. W. Gosper (1997)
5. „The Golden Mean” – K. Wiedman (19996)

www.referateok.ro – cele mai ok referate