

Funcția logaritmică

Barbir Iosif, clasa a X-a C
Referat Matematica
Indrumator, prof. Oanea Calin

Logaritmi

1. Definiția logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuația exponențială

$$a^x = N, N > 0 \quad (1)$$

Ecuația (1) are o soluție care este unic determinată. Această soluție se notează

$$x = \log_a N \quad (2)$$

și se numește logaritmul numărului pozitiv baza a .

Din (1) și (2) obținem egalitatea

$$a^{\log_a N} = N \quad (3)$$

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a > 0, a \neq 1$) pentru a obține numărul dat

Dacă în (1) facem $x=1$, obținem $a^1 = a$ și deci

$$\log_a a = 1 \quad (4)$$

Exemple

1) Să se calculeze $\log_2 32$.

Cum $2^5 = 32$, atunci din definiția logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2) Să se determine $\log_2 \frac{1}{16}$.

Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$, obținem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3) Să se determine $\log_{1/3} 27$.

Să considerăm ecuația exponențială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$. Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obținem $x = -3$

și deci $\log_{1/3} 27 = -3$.

4) Să se determine $\log_4 256$.

Cum $4^4 = 256$, atunci din definiția logaritmului obținem $\log_4 256 = 4$.

Observații

1. În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc și logaritmi zecimali. Aceștia se notează cu \lg în loc de \log_{10} ; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie $\lg 106$ în loc de $\log_{10} 106$ și $\lg 5$ în loc de $\log_{10} 5$ etc.

2. În matematica superioară apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul irațional, notat cu e , $e = 2,718281828\dots$. Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme de fizică și intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice. De aceea acești logaritmi se numesc naturali. Logaritmul natural al numărului a se notează $\ln a$.

2. Funcția logaritmică

Fie $a > 0, a \neq 1$ un număr real. La punctul 1 am definit noțiunea de logaritm în baza a :
 fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat. Acest lucru ne permite să
 definim o funcție

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x \quad \text{numită funcție logaritmică.}$$

Proprietățile funcției logaritmice:

1. $f(1) = 0$.

Cum $a^0 = 1$ rezultă că $\log_a 1 = 0$ și deci $f(1) = 0$.

2. Funcția logaritmică este monotonă. Dacă $a > 1$, atunci funcția logaritmică este strict crescătoare, iar
 dacă $0 < a < 1$, funcția logaritmică este strict descrescătoare.

Să considerăm cazul $a > 1$ și fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$. Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ și
 $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcția exponențială fiind crescătoare obținem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ și din faptul că funcția exponențială cu
 baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică
 $f(x_1) > f(x_2)$.

3. Funcția logaritmică este bijectivă

Dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, atunci din $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) de la
 punctul 1 obținem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ și $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcție in-
 jectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare. Notăm cu $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ și $\log_a x = \log_a a^y = y$
 Deci $f(x) = y$, ceea ce ne arată că f este și surjectivă. Așadar, f este bijectivă.

4. Inversa funcției logaritmice este funcția exponențială

Funcția logaritmică $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, fiind bijectivă, este inversabilă. Inversa ei
 este funcția exponențială $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), g(x) = a^x$.

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ și dacă $y \in \mathbb{R}$, atunci
 atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

3) Proprietățile logaritmilor

Folosind proprietățile puterilor cu exponenți reali obținem următoarele proprietăți
 pentru logaritmi:

a. Dacă A și B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ și $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ și $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obținem
 $a^{x+y} = A \cdot B$ și deci $\log_a(AB) = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observație.

Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive A_1, A_2, \dots, A_n adică

$$\log_a(A_1 A_2 \dots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \dots + \log_a A_n.$$

b. Dacă A și B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și cel al numitorului).

Într-adevăr, ținând cont de proprietatea a., avem $\log_a A = \log_a \left(\frac{A}{B} * B \right) = \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$,

de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observație.

Dacă punem $A=1$ și ținem cont că $\log_a 1=0$, obținem egalitatea:

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$$

c. Dacă A este un număr pozitiv și m un număr real arbitrar, atunci

$$\log_a A^m = m \log_a A$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii și logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$ și deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

d. Dacă A este un număr pozitiv și n un număr natural ($n \geq 2$), atunci

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \log_a A / n$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii și logaritmul numărului).

Într-adevăr, proprietatea d este un caz particular al proprietății c, punând $m = \frac{1}{n}$.

Exemple

1) Să se calculeze $\log_3 75$.

$$\log_3 75 = \log_3 (3 * 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2 \log_3 5.$$

2) Să se determine $\log_2 1000 - \log_2 125$

$$\text{Avem } \log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

3) Să se calculeze $\lg 0,18 - \lg 180$.

$$\text{Avem } \lg 0,18 - \lg 180 = \lg \frac{0,18}{180} = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3.$$

4) Să se calculeze $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

$$\text{Avem } \log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) = -\log_6 (18 * 12) = -\log_6 6^3 = -3.$$

5) Să se calculeze $\log_2 \sqrt[5]{81}$. Avem $\log_2 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5} \log_2 81 = \frac{1}{5} \log_2 3^4 = \frac{4}{5} \log_2 3$.

6) Să se calculeze $\log_2 \sqrt[4]{8}$. Avem $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \log_2 2^3 = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4}$.

4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiași număr

Dacă a și b sunt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\text{Log}_a A = \text{Log}_b A * \text{Log}_a b$$

Într-adevăr, dacă $\text{Log}_a A = x$ și $\text{Log}_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ și $b^y = A$, de unde obținem $a^x = b^y$. Dar atunci $\text{Log}_a a^x = \text{Log}_a b^y$ sau $x \text{Log}_a a = y \text{Log}_a b$.

Cum $\text{Log}_a a = 1$, avem $x = y \text{Log}_a b$, adică $\text{Log}_a A = \text{Log}_b A * \text{Log}_a b$.

Observație.

Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obținem $\text{Log}_a a = \text{Log}_b a * \text{Log}_a b$. Cum $\text{Log}_a a = 1$, rezultă că:

$$\text{Log}_a b = \frac{1}{\text{Log}_b a}$$

Exemple

1) Să se scrie $\log_2 x$ în funcție de $\log_4 x$.

Avem $\log_2 x = \log_4 x * \log_2 4 = 2 \log_4 x$.

2) Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

$$\text{Avem } \log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6}.$$

Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6} > 2$ sau $(\log_2 6)^2 - 2 \log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$

inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

5) Operația de logaritmare a unei expresii

Să considerăm expresia:

$$E = \frac{17^3 \sqrt[4]{131} * \sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37 * 98 * 23}}$$

Vom logaritma expresia într-o anumită bază convenabilă a . Folosind proprietățile logaritmilor, obținem:

$$\log_a E = \log_a (17^3 \sqrt[4]{131} \sqrt[3]{92}) - \log_a \sqrt[5]{37 * 98 * 23} = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[4]{131} + \log_a \sqrt[3]{92} - \frac{\log_a (37 * 98 * 23)}{5} =$$

$$= 3 \log_a 17 + \frac{1}{4} \log_a 131 + \frac{1}{3} \log_a 92 - \frac{1}{5} \log_a 37 - \frac{1}{5} \log_a 98 - \frac{1}{5} \log_a 23.$$

Deci am obținut egalitatea:

$$\text{Log}_a E = 3 \log_a 17 + \frac{1}{4} \log_a 131 + \frac{1}{3} \log_a 92 - \frac{1}{5} \log_a 37 - \frac{1}{5} \log_a 98 - \frac{1}{5} \log_a 23.$$

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri și radicali, putem să-I asociem, exact ca în exemplu de mai sus, o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferențe) de logaritmi înmulțite eventual cu anumite numere raționale. Operația prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numește "operație de logaritmare".

Exemple

1) Fie $E = a^2 \sqrt[3]{ab^6}$. Prin operația de logaritmare, obținem:

$$\log_c E = \log_c (a^2 \sqrt[7]{ab^6}) = \log_c a^2 + \log_c \sqrt[7]{ab^6} = 2\log_c a + \frac{1}{7}\log_c a + \frac{6}{7}\log_c b.$$

2) Fie $E = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$. Prin operația de logaritmare, obținem:

$$\log_c E = \log_c \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{1}{4}\log_c \frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{4}(\log_c a^3 - \log_c b^5) = \frac{3}{4}\log_c a - \frac{5}{4}\log_c b.$$

Adesea în calcule este nevoie să se facă și operația inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, să considerăm expresia $\log_c E = 2\log_c a - \frac{1}{2}\log_c b - 3\log_c 3$.

Folosind proprietățile logaritmilor, avem:

$$\log_c E = \log_c a^2 - \log_c \sqrt{b} - \log_c 3^3 = \log_c \frac{a^2}{\sqrt{b} \cdot 3^3} = \log_c \frac{a^2}{27\sqrt{b}}, \text{ de unde obținem că}$$

$$E = \frac{a^2}{27\sqrt{b}}.$$

Ecuatii și inecuații logaritmice

1) Ecuatiile logaritmice sunt ecuații în care expresiile ce conțin necunoscute apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu: $\log_{x+1}(x+2)=1$; $\lg(x^2+x-2)=3$; $\log_x(5x^2+3)=\lg(2x+3)-1$.

Folosind injectivitatea funcției exponențiale, avem că rezolvarea unei ecuații de tipul $\log_{g(x)} f(x)=b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuației $f(x)=g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluțiile obținute să satisfacă $f(x)>0$, $g(x)>0$, $g(x) \neq 1$, pentru care expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuațiile exponențiale, în practică atunci când avem de rezolvat o ecuație logaritică, vom proceda astfel: folosind diverse substituții precum și proprietățile logaritmice, vom căuta să o reducem la rezolvarea unor ecuații simple, de regulă de gradul întâi sau de gradul al doilea.

Exemplu

Să se rezolve ecuația: $\log_x(x^2-3x+9)=2$.

Obținem $x^2-3x+9=x^2$ și deci $3x=9$, $x=3$. Deoarece pentru $x=3>0$, expresia x^2-3x+9 este pozitivă, rezultă că $x=3$ este soluție a ecuației.

Rezolvarea altor ecuații se bazează pe injectivitatea funcției logaritmice, și anume din $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, deducem $f(x)=g(x)$, impunând condițiile: $f(x)>0$, $g(x)>0$

Exemple

1) Să se rezolve ecuația: $\lg(x^2-15)=\lg(x-3)$. Deducem că $x^2-15=x-3$, deci $x^2-x-12=0$

adică $x_1=4, x_2=-3$. Deoarece pentru $x_2=-3$ obținem $x-3=-3-3=-6<0$, rezultă că $x_2=-3$ nu este soluție a ecuației. Deci numai 4 este soluție.

2) Să se rezolve ecuația: $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg \sqrt{x}$. În această ecuație punem de la început condițiile $x-1>0, x>0$, pentru a avea sens expresiile $\lg(x-1), \lg x^5, \sqrt{x}, \lg \sqrt{x}$.

Ecuația se mai scrie $2\lg(x-1) = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x$ și deci $2\lg(x-1) = 2\lg x$. Prin urmare, $\lg(x-1) = \lg x$, de unde obținem $x-1=x, -1=0$, contradicție; rezultă deci că ecuația dată nu are soluții.

3) Să se rezolve ecuația: $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$. Punem condițiile de existență a logaritmulor: $x+7>0, 3x+1>0$, deci $x>-\frac{1}{3}$. Obținem $\lg(x+7)(3x+1) = 2$ și deci $(x+7)(3x+1) = 10^2 = 100$. Rezultă

ecuația de gradul al doilea $3x^2 + 22x - 93 = 0$, de unde rezultă $x_1=3, x_2=-\frac{31}{3}$. Deoarece $-\frac{31}{3} < -\frac{1}{3}$, obținem că 3 este singura soluție a ecuației date.

Observație

Ecuația precedentă nu este echivalentă cu ecuația $\lg(x+7)(3x+1) = 2$, care are două soluții $x_1=3, x_2=-\frac{31}{3}$, deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui $x, \lg(x+7)(3x+1)$ are sens.

4) Să se rezolve ecuația: $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$. Avem condiția $x>0$ și făcând substituția $\log_3 x = y$, obținem $y^2 - 3y - 4 = 0$. Deci $y_1=4, y_2=-1$. Din $\log_3 x = 4$, obținem $x = 3^4, x = 81$, iar din $\log_3 x = -1$, obținem $x = 3^{-1}, x = \frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuații care nu se pot încadra într-un anumit tip. Astfel, pot apărea ecuații cu logaritmi scriși în diferite baze, ecuații în care apar expresii conținând necunoscute și la exponenți și la logaritmi etc.

5) Să se rezolve ecuația: $\log_2 x + \log_3 x = 1$. Deducem, aplicând formula de schimbare a bazei, $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$

sau $\lg x = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}$. Deci $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$.

6) Să se rezolve ecuația: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$. Deoarece $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, rezultă $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2$. Notând

$\log_3 x = y$, obținem $y + \frac{1}{y} = 2$, adică $y^2 - 2y + 1 = 0$; deci $y = 1$, adică $\log_3 x = 1$. Prin urmare, $x = 3$.

7) Să se rezolve ecuația: $x^{\lg x + 2} = 1000$. Punem condiția de existență a expresiilor: $x>0$. Logaritmand, obținem o ecuație echivalentă $\lg(x^{\lg x + 2}) = \lg 1000$ care devine $(\lg x + 2)\lg x = 3$. Notând $\lg x = y$, avem $y^2 + 2y - 3 = 0$ și deci $y_1 = -3, y_2 = 1$. Din $\lg x = -3$, obținem $x = 10^{-3}, x = 0,001$, iar din $\lg x = 1$, rezultă $x = 10$.

2) Sisteme de ecuații logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior la ecuațiile de tipul respectiv.

Exemplu

Să se rezolve sistemul $x^2+y^2=425$

$$\lg x + \lg y = 2$$

$$\begin{array}{l} \text{Obținem, pe rând sistemele } x^2+y^2=425 \quad x^2+y^2=425 \\ \lg xy = 2 \quad \Leftrightarrow xy=1000 \\ x, y > 0 \quad \quad \quad x, y > 0 \end{array}$$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s=x+y, p=xy$ și vom avea $s^2-2p=425 \quad s^2=625 \quad s=\pm 25$
 $P=100 \quad \Leftrightarrow p=100 \quad \Leftrightarrow p=100$

Sistemul $s=25$

$P=100$ dă soluțiile $(5,20), (20,5)$ care satisfac și condițiile de existență ale sistemului inițial, $x>, y>0$. Sistemul $s=-25$

$P=100$ dă soluțiile $(-20,-5), (-5,-20)$, care nu convin.

3) Inecuații logaritmice

Rezolvarea inecuațiilor logaritmice se bazează pe proprietățile de monotonie ale funcției logaritmice. Am văzut că funcția logaritmică este crescătoare dacă baza este supraunitară și descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple

1) Să se rezolve inecuația: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > -3$. Avem că $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$ și inecuația devine $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară (funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}, g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ este descrescătoare), inecuația devine $2x-1 < 27$, adică $x < 14$. În același timp, din condiția de existență a logaritmului inițial, avem $2x-1 > 0$, deci $x > \frac{1}{2}$. Deci obținem pentru x valorile posibile $x \in \left(\frac{1}{2}, 14\right)$.

4) Sisteme de inecuații logaritmice

În astfel de sisteme se aplică proprietățile și metodele arătate anterior la inecuațiile Logaritmice. Rezolvarea acestora se reduce în definitiv la rezolvarea sistemelor de inecuații întâlnite în clasa a IX-a.

Exemplu

Să se rezolve sistemul

$$2^{x^2-2x-3} > 2^{x+1}$$

$\log_3(x^2-3x+9) < 3$. Observăm, mai întâi, că $x^2-3x+9 > 0$ oricare ar fi x real ($\Delta = -27 < 0$)
 $|x-2| > 3$ deci logaritmul este definit pentru orice x real.

Deoarece $3 = \log_3 27$ și, ținând seama de monotonia funcțiilor exponențială și logaritmică, rezultă sistemul echivalent

$$\begin{array}{l} X^2-2x-3 > x+1 \\ X^2-3x+9 < 27 \\ |x-2| > 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2-3x-4 > 0 \\ x^2-3x-18 < 0 \\ |x-2| > 3 \end{array}$$

Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-3x-4 > 0$ este $M_1 = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-3x-18 < 0$ este $M_2 = (-3, 6)$, iar mulțimea soluțiilor inecuației $|x-2| > 3$ este $M_3 = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$. Atunci mulțimea soluțiilor sistemului este $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-3, -2) \cup (5, 6)$.

Aplicații

I. Admiterea în învățământul superior

1. Să se calculeze expresia:

$$E = \log_2 25 - \log_2 \left(\frac{20}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{4}{21} \right)$$

Informatică, Baia Mare, 1997

$$E = \log_2 \frac{35}{20} * \frac{4}{21} \Rightarrow E = \log_2 35 * \frac{3}{20} * \frac{4}{21} = \log_2 \frac{420}{420} = \log_2 1 = 0$$

$$\Rightarrow E = 0.$$

2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{array}{l} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{array}$$

Colegiu de Informatică, Cluj, 1997

$$xy = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{x}$$

$$x^{\lg y} = 4$$

$$\lg x^{\lg y} = \lg 4$$

$$\lg y \cdot \lg x = \lg 4$$

$$\lg \frac{40}{x} \cdot \lg x = \lg 4$$

$$(\lg 40 - \lg x) \lg x = \lg 4$$

$$\lg x \cdot \lg 40 - \lg^2 x = \lg 4$$

$$\lg^2 x - \lg x \lg 40 + \lg 4 = 0$$

Notăm $\lg x = y$

$$\Rightarrow y^2 - y \lg 40 + \lg 4 = 0$$

$$\Delta = \lg^2 40 - 4 \lg 4 = (\lg 4 + \lg 10)^2 - 4 \lg 4 = \lg^2 4 + 2 \lg 4 + 1 - 4 \lg 4 = \lg^2 4 - 2 \lg 4 + 1 = (\lg 4 - 1)^2$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{\lg 40 \pm (\lg 4 - 1)}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\lg 40 + \lg 4 - 1}{2} = \frac{2 \lg 4}{2} = \lg 4 \Rightarrow \lg x = \lg 4 \Rightarrow x = 4; y = 10$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{\lg 40 - \lg 4 + 1}{2} = 1 \Rightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 40; y = 4$$

3. Știind că $\log_{40} 100 = a$, să se exprime $\log_{16} 25$ în funcție de a .

Chimie, Metalurgie, 1981

$$\log_{40} 100 = a \Rightarrow \frac{\lg 100}{\lg 40} = a \Rightarrow a = \frac{2}{1 + 2 \log_{10} 2} = \frac{2}{1 + 2 \lg 2} \Rightarrow \lg 2 = \frac{2 - a}{2a}$$

$$\Rightarrow \log_{16} 25 = \frac{\lg 25}{\lg 16} = \frac{\lg 5^2}{\lg 2^4} = \frac{2 \lg 5}{4 \lg 2} = \frac{\lg 5}{2 \lg 2} = \frac{\lg \frac{10}{2}}{2 \lg 2} \Rightarrow \log_{16} 25 = \frac{1 - \lg 2}{2 \lg 2} = \frac{1 - \frac{2 - a}{2a}}{2 \cdot \frac{2 - a}{2a}} = \frac{3a - 2}{4 - 2a}$$

4. Știind că $a = \lg 2$ și $b = \lg 3$ să se calculeze $x = 3^{\log_{27} (\lg 150)^3}$

Matematică-Fizică, Sibiu, 1998

$$x = 3^{\log_{27} (\lg 150)^3}$$

$$\Leftrightarrow x = 3^{3 \log_{27} (\lg 150)} = 27^{\log_{27} (\lg 150)} = \lg 150 = \lg 50 + \lg 30 = \lg \frac{100}{2} + \lg 3 = \lg 100 - \lg 2 + b = \log_{10} 100 - \lg 2 + b = 2 - a + b$$

5. Să se arate că expresia: $E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}}$ este independentă de valorile strict mai mari

ca 1 ale variabilelor x, z, y .

Inginerie, Constanța, 1996

$$E = \frac{\log_2(x\sqrt{y^3\sqrt{z}})}{\log_3(x\sqrt{y^3\sqrt{z}})}$$

Notăm $x\sqrt{y^3\sqrt{z}} = t \Rightarrow E = \frac{\log_2 t}{\log_3 t} = \frac{\log_2 t}{\frac{\log_2 t}{\log_2 3}} = \log_2 t * \frac{\log_2 3}{\log_2 t} = \log_2 3 \Rightarrow E = \log_2 3$

II. Concursurile școlare

1. Gorj 2001 - faza locală

Să se arate că dacă $x, y, z \in (0, 1)$ are loc inegalitatea:

$$\log_x yz + \log_y xz + \log_z xy \geq 6;$$

$$\log_x yz + \log_y xz + \log_z xy = (\log_x y + \log_y x) + (\log_x z + \log_z x) + (\log_y z + \log_z y) \geq 6$$

$$\text{Dacă } x, y \in (0, 1) \Rightarrow \log_x y > 0$$

$\log_x yz + \log_y xz + \log_z xy \geq 6$ are loc doar când $x=y=z$.

2. Bacău 2001 - faza locală

Să se calculeze:

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} = E$$

$$\text{Notăm } a = \log_2 12$$

$$\log_2 24 = \log_2 12 * 2 = \log_2 12 + \log_2 2 = a + 1$$

$$\log_{96} 2 = \frac{1}{\log_2 96} = \frac{1}{\log_2 12 * 8} = \frac{1}{\log_2 12 + \log_2 8} = \frac{1}{a + 3}$$

$$\log_2 192 = \log_2 12 * 16 = \log_2 12 + \log_2 16 = a + 4$$

$$\log_{12} 2 = \frac{1}{\log_2 12} = \frac{1}{a}$$

$$(a+1)(a+3) - a(a+4) = 3 \Rightarrow 3 = 3(A)$$

3. Cluj 2001 - faza locală

Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{2 * \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \right] = \cos \pi x, \text{ unde } [\alpha] \text{ este partea întregă a numărului } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Cos } \pi x = \{-1, 0, 1\} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{I. } \left[\frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \in [-1, 0) \Leftrightarrow \log_2 x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

$$S_1 = (0, 1) \cap \{2k + 1/k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$$

$$\text{II. } \left[\frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \in [0, 1) \Leftrightarrow \log_2 x \geq 0; \log_2 x \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1, +\infty) \setminus \{2\} \cap \{2k + 1/k \in \mathbb{Z}\} = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}^*\} = S_2$$

$$\text{III. } \left[\frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \right] = 1 \Rightarrow \frac{2 \log_2 x}{\log^2_2 x + 1} \in [1, 2] \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$S_3 = \{2k + 1/k \in \mathbb{Z}\} \cap \{2\} = \{2\}$$

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2\} = S.$$