Ecuatii care se rezolva prin descompuneri in factori sau substitutii

Metoda de rezolvare:

In general, pentru rezolvarea ecuatilor exponentiale cu baze diferite, se recomanda, descompunerea bazelor in factori primi,observand astfel o anume posibilitate de a grupa termenii ecuatiei in ideea de a scrie ecuatia ca un produs de factori egal cu 0.Alteori este profitabil de a lucra cu cat mai putine baze.In fine,in unele cazuri, se remarca o anume expresie depinzand de necunoscuta care poate fi substituita si se rescrie ecuatia data in functie de noua necunoscuta.Asa sunt ecuatiile care au forma generala:

1) $A(a^{2x}+a^{-2x})+B(a^{x}+a^{-x})+C=0, a>0, a\neq 1, A,B,C \in \mathbf{R}$

In acest caz se noteaza: $a^{x}+a^{-x}=y$

Prin ridicarea la patrat rezulta $a^{2x}+a^{-2x}=y^2-2$,atunci ecuatia se scrie: $Ay^2+By+C-2A=0$ cu soutiile: y_1, y_2.

Din $a^{x}+\frac{1}{a^{x}}\geq 2 \Rightarrow y>2$(deoarece $u+\frac{1}{u}\geq 2$ daca $u>0$)

2.) $A(a^{3x}+a^{-3x})+B(a^{x}+a^{-x})+C=0, a>0, a\neq 1, A,B,C \in \mathbf{R}$

Si in aceasta situatie punem $a^{x}+a^{-x}=y\geq 2$ de aici prin ridicare la $^3 \Rightarrow a^{3x}+a^{-3x}=y^3-3y$.

Problme rezolvate:

Sa se rezolve ecuatiile exponentiale:

a) $36\cdot 5^{2x}+5\cdot 6^{x}=180+150^{x}$

b) $9(9^{x}+9^{-x})-3(3^{x}+3^{-x})-72=0$

Rezolvare:

$y_2 = C_3e^{-x} + C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem : y_1 = -C_1e^{x} + C_2e^{2x} - C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$

$C_1 = 0, C_2 = 0.ţiC_3 = 1.Solutia.cautata.este.deci : y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0.$

$y_2 = C_3e^{-x} + C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem : y_1 = -C_1e^{x} + C_2e^{2x} - C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$

$C_1 = 0, C_2 = 0.ţiC_3 = 1.Solutia.cautata.este.deci : y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0.$

$y_2 = C_3e^{-x} + C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem : y_1 = -C_1e^{x} + C_2e^{2x} - C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$

$C_1 = 0, C_2 = 0.ţiC_3 = 1.Solutia.cautata.este.deci : y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0.$

a) Ecuatia se scrie echivalent:

$y_2 = C_3e^{-x} + C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem : y_1 = -C_1e^{x} + C_2e^{2x} - C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$

$C_1 = 0, C_2 = 0.ţiC_3 = 1.Solutia.cautata.este.deci : y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}, y_3 = 0.$

$36(25^{x}-5)-6^{x}(25^{x}-5)=0 \Leftrightarrow (25^{x}-5)(36-6^{x})=0$, ultimul produs este 0 daca cel putin unul din factori este egal cu 0.Deci $25^{x}-5=0$ sau $6^{x}=36$

Prima ecuatie are solutia $x_1=\frac{1}{2}$, iar a doua ecuatie da solutia x_2=2. Deci ecuatia data are solutiile x_1, x_2

b)aducem exponentialele la aceeasi baza 3 si ecuatia se scrie echivalent:
$9(3^{2x}+3^{-2x})-3(3^{x}+3^{-x})-72=0$. Notam $3^{x}+3^{-x}=y\geq 2$, iar de aici prin ridicare la patrat obtinem $3^{2x}+3^{-2x}=y^2-2$. Cu aceasta ecuatie data devine: $9(y^2-2)-3y-72=0$, cu solutiile : $y_1=\frac{10}{3}$, y_2=-3. Tinand seama ca $y\geq 2$,numai ecuatia $3^{x}+3^{-x}=\frac{10}{3}$, are solutii.Se noteaza $3^{x}=z>0 \Rightarrow 3z^2-10z+3=0$, cu solutiile z_1=3, $z_2=\frac{1}{3}$. Ecuatiile $3^{x}=3$, $3^{x}=3^{-1}$ dau solutiile x_1=1, x_2=-1 si ecuatia data are solutiile: x_1=1, x_2=-1

<u>Ecuatii exponentiale cu solutie unica:</u>

<u>Metoda de rezolvare:</u>

$$y_2=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem: y_1=-C_1e^{x}+C_2e^{2x}-C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$$
$$C_1=0, C_2=0.\text{ţi}C_3=1.Solutia.cautata.este.deci: y_1=-e^{-x}, y_2=e^{-x}, y_3=0.$$
$$y_2=C_3e^{-x}+C_2e^{2x}.Din.ultima..ecuatie..a..sistemului..deducem: y_1=-C_1e^{x}+C_2e^{2x}-C_3e^{-x}, iar..conditiile.initiale.$$
$$C_1=0, C_2=0.\text{ţi}C_3=1.Solutia.cautata.este.deci: y_1=-e^{-x}, y_2=e^{-x}, y_3=0.$$

Rezolvarea aceastei ecuatii consta in a le aduce la forma f(x)=c, unde “f” este o fuctie strict monotona, iar “c” este o constanta si observand ca ecuatia are o solutie x_0. Cum “f” este strict monotona se deduce ca “f” este injective si deci ecuatia data are solutia unica x_0.

<u>Probleme rezolvate:</u>
Sa se resolve ecuatiile:

a) $3^{x-1}+5^{x-1}=34$
b) $4^{x}+9=5^{x}$

<u>Rezolvare</u>

a)Sa observam ca x=3, verifica ecuatia deoarece: $3^2+5^2=34$. Functia $f(x)=3^{x-1}+5^{x-1}$ fiind suma a doua functii exponential cu baze supraunitare este strict crescatoare.Deci x=3 este singura solutie a ecuatiei
b)In acest caz se imparte ecuatia prin 5^{x} ($\neq 0$)si aceasta se scrie echivalent: $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}+9\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=1$. Se vede ca x=2 este solutia a ecuatiei.Functia f(x)= : $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}+9\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ este strict descrescatoare,fiind suma a doua astfel de functii.Deci ecuatia are sulutia unica x=2

Tema:

a) $8 - x \cdot 2^{x} + 2^{3-x} = 0$

b) $3^{2x} - x \cdot 3^{x} - 3^{x} - 6x^2 - 7x - 2 = 0$