

Phi si phi - Proportia divină.

Cuprins

1. Phi si phi - Proportia divină.
2. Despre numărul de aur (Phi si phi)
3. Numărul de aur si Fibonacci 3
4. Reprezentare grafică - dreptunghiuri de aur.
5. Alte siruri care tind la Phi
6. Câteva curiozități despre Phi ai phi
7. Anexa nr. 1.
8. Reprezentarea grafică.
9. Anexa nr. 2.
10. Programul sursă C++ ce creează reprezentarea grafică (din anexa 1)
11. Anexa nr. 3.
12. Numărul Phi cu 20.000 de zecimale.

Despre numărul de aur (Phi si phi)

Să începem cu o problemă de estetică. Să considerăm un segment de dreaptă. Care este cea mai „plăcută” împărțire a acestui segment în două părți ? Unii ar spune că în două jumătăți, alții ar spune că în proporție de 3:1

Grecii antici au găsit un răspuns pe care ei îl considerau corect (teoreticienii îl numesc „simetrie dinamică”). Dacă părții stângi a segmentului îi atribuim lungimea $u=1$, atunci partea dreaptă va avea o lungime $v=0,618\dots$. Despre un segment partitionat astfel spunem că este împărțit în Secțiunea (sau Proportia, Diviziunea) de aur (divină).

$$\frac{u}{u+v} = \frac{u}{v}$$

Care este justificatia pentru înzestrarea acestei proportii particulare cu un asemenea statut aparte ? Ideea este că lungimea u reprezintă aceeași parte din tot segmentul $(u+v)$ cât reprezintă lungimea v din partea u . Cu alte cuvinte :

Dacă notăm $\Phi=u/v$, vom rezolva ecuația pentru Φ , observând că :

$$1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{u}{v} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \Phi$$

Rădăcina pozitivă a ecuației, care se poate scrie

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$$

este :
o constantă care este numită Numărul de aur sau Proportia divină.

$$v = \frac{u}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.6180339887...$$

Dacă presupunem $u=1$, atunci

, cum am presupus mai devreme. Notăm numărul $v = 0.6180339887... = \Phi$ (phi).

Numărul de aur si Fibonacci

Afirmăm că numărul nostru Phi este strâns legat de sirul lui Fibonacci. Pentru cei care nu știu, sirul lui Fibonacci este definit prin :

$$f_0=0; f_1=1; f_n = f_0 + f_1 \text{ (oricare } n \geq 2).$$

Acest sir exprimă (într-un mod naiv) creșterea populației de iepuri. Se presupune că iepurii au câte doi pui o dată la fiecare lună după ce împlinesc vârsta de două luni. De asemenea, puii nu mor niciodată și sunt unul de sex masculin și unul de sex feminin.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

În felul acesta, numărul de perechi de iepuri existente după n luni ar trebui să fie f_n . Vă puneti întrebarea ce poate avea în comun Φ cu sirul lui Fibonacci ? Aceasta este o idee remarcabilă a matematicii. Pentru început să observăm că :

Φ este o fracție infinită.

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$1 = \frac{1}{1}$$

Acum să privim fracțiile parțiale :

Toate rezultatele fracțiilor sunt rapoarte de numere Fibonacci succesive, fapt ce „motivează” teorema ce spune că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

În cuvinte putem spune că, pe măsură ce n se apropie de infinit, raportul termenilor al $n+1$ -lea și al n -lea din sirul lui Fibonacci se apropie de Φ . Această teoremă este valabilă pentru orice secvență arbitrară ce satisface recurența :

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (oricare $n \geq 2$), cu proprietatea că primii doi termeni sunt diferiți.

Reprezentare grafică - dreptunghiuri de aur

Legătura geometrică dintre numărul Phi și numerele lui Fibonacci poate fi văzută în graficul din anexa 1. Pornind de la un dreptunghi de aur (de lungime Φ și lățime 1), urmează un șir natural de „cuibări” ale dreptunghiurilor divine în cel inițial.

Lungimea și lățimea celui de-al n-lea dreptunghi de aur pot fi scrise ca expresii liniare, unde coeficienții sunt întotdeauna numere Fibonacci. Aceste dreptunghiuri pot fi înscrise într-o spirală logaritmică, așa cum arată imaginea. Să presupunem că punctul din colțul din stânga jos al primului dreptunghi este originea unui sistem rectangular de coordonate. Apare acum întrebarea : unde se află punctul spre care tinde spirala?

$$(x_{\infty}, y_{\infty}) = \left(\frac{1+3 \cdot \Phi}{5}, \frac{3-\Phi}{5} \right)$$

Răspunsul este : spirala tinde spre punctul de coordonate

Asemenea spirale logaritmice sunt echiangulare, în sensul că orice dreaptă ce trece prin punctul (x_{∞}, y_{∞}) taie spirala sub un unghi constant. În sensul acesta, spunem că spirala este o generalizare a cercului, unde unghiul este de 90°. Spirala noastră are un unghi

$$\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{2}{\pi} \ln(\Phi)\right) = 72.968...^{\circ}$$

Spiralele logaritmice se întâlnesc destul de des și în natură. De exemplu carcasa unui melc, colții unui elefant sau conurile de pin au formă de spirală.

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \Phi$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3 - \Phi}$$

Altă aplicatie geometrică a numărului Phi apare la desenarea unui pentagon regulat fără cerc și compas. Aceasta este legată de faptul că

Alte siruri care tind la Phi

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

La fel de simplu cum Φ este o fracție infinită, tot așa poate fi și un radical infinit :

Iată altă serie infinită legată de Φ :

$$\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5} \cdot \ln(\Phi) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \dots$$

Dintre multe alte expresii posibile ce se apropie de Φ următoarele două sunt mai cunoscute :

$$\frac{1}{\alpha - \Phi} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \pi}{5}\right) = 1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \frac{e^{-10\pi}}{1 + \dots}}}}}}$$

$$\frac{1}{\beta - \Phi} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{5}}\right) = 1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-10\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}}}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [(\Phi - 1) \cdot \sqrt{5}]^{\frac{5}{2}}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[3]{\alpha' - 1}}$$

$$\alpha = (\Phi \cdot \sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$$

unde

Câteva curiozități despre Phi și phi

Un prim fapt ce „sare în ochi” și este cel puțin curios îl constituie relația simplă între Φ , π și e :

$$\Phi = \frac{7}{5} \cdot \frac{\pi}{e}$$

Pare într-adevăr ciudat cum trei numere irrationale se „leagă” printr-o expresie atât de simplă, însă matematicienii au demonstrat că așa stau lucrurile și vrem sau nu trebuie să-i credem. Cine nu crede poate folosi un calculator electronic pentru a face niște calcule simple cu vreo opt zecimale și va fi uimit rezultate.

Coincidențele nu se opresc însă aici. Să considerăm următorul șir :

$$f_0 = 0.6180339887\dots; \quad f_1 = 1.000; \quad f_0 = 1.6180339887\dots; \\ f_0 = 2.6180339887\dots;$$

$f_n = f_0 + f_1$ (oricare $n \geq 2$).

Din definiția sirului se observă că oricare doi termeni consecutivi adunați îți dau ca rezultat pe următorul. Este însă nevoie de un ochi ager pentru a observa că prin înmulțirea oricărui termen cu $\phi = 1.6180339887\dots$ va rezulta termenul imediat următor.

Asadar $f_{n+1} = f_n \cdot \Phi$. Prezentăm acum câteva egalități simple cu Φ și ϕ :

$$\Phi - \phi = 1$$

$$\Phi + \phi = \sqrt{5}$$

$$\Phi \cdot \phi = 1$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

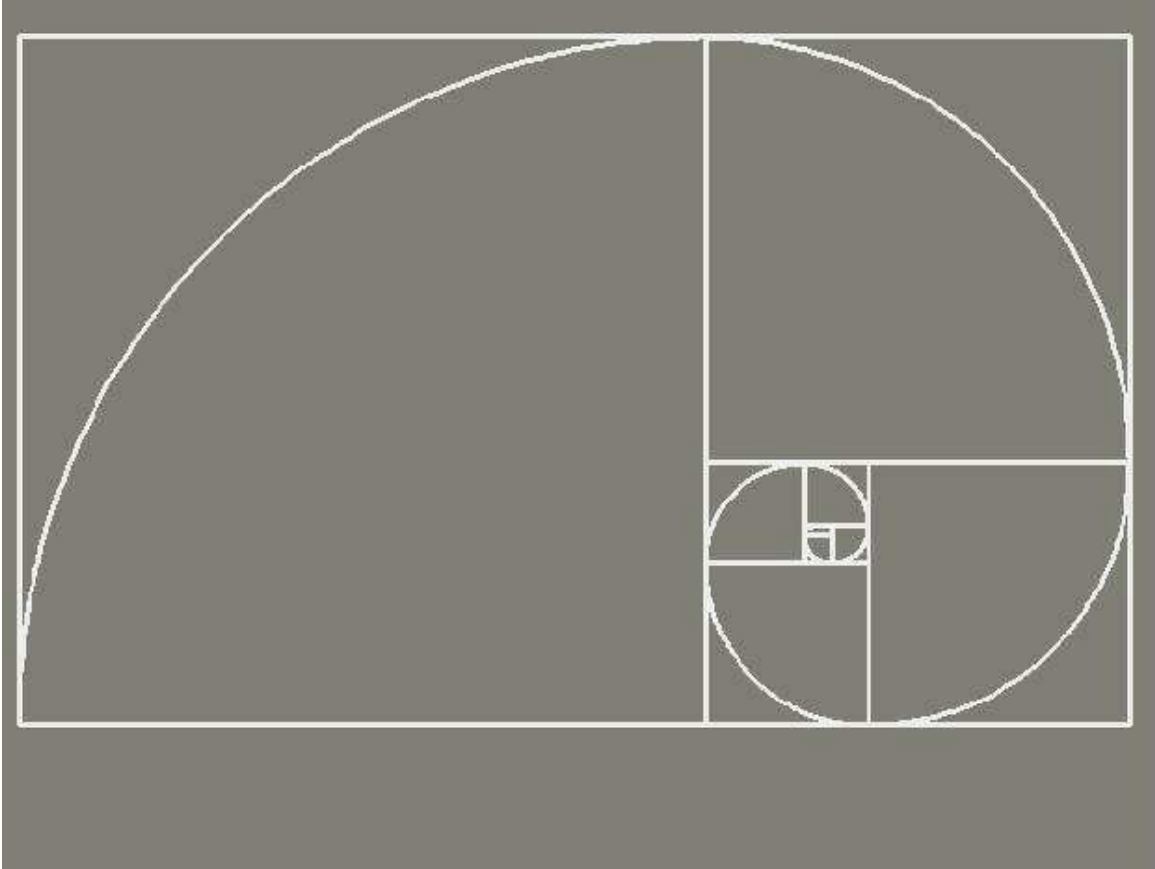
$$\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$$

$$\frac{\phi}{\Phi} = 1 - \phi$$

$$\frac{\Phi}{\phi} = \Phi + 1$$

Anexa nr. 1

Reprezentarea grafică



Anexa nr. 2

Programul sursă C++ ce creează reprezentarea grafică (din anexa 1)

```
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <graphics.h>
int x31,x32,y31,y32;
void rect1 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
```

```

    arc(x1+y2-y1,y2,90,180,y2-y1);
    }
void rect2 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x1,y1+x2-x1,0,90,x2-x1);
  }
void rect3 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x2-y2+y1,y1,270,360,y2-y1);
  }
void rect4 (int x1, int y1, int x2, int y2)
{ setcolor(1);
  rectangle(x1,y1,x2,y2);
  setcolor(14);
  arc(x2,y2-x2+x1,180,270,x2-x1);
  }
void gold(int n)
{ int i,j,k,l;
  for(i=1;i<n;i++)
  { if (i%4==0) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect1(x31,y31,x32,y32-x32+x31); y32=y32-x32+x31; }
    else break;
  if (i%4==1) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect2(x31+y32-y31,y31,x32,y32); x31=x31+y32-y31; }
    else break;
  if (i%4==2) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect3(x31,y31+x32-x31,x32,y32); y31=y31+x32-x31; }
    else break;
  if (i%4==3) if ((x32>x31)&&(y32>y31))
    { rect4(x31,y31,x32-y32+y31,y32); x32=x32-y32+y31; }
    else break;
  } }
void main()
{ int n;
  int gdriver=DETECT,gmode;

```

```

initgraph(&gdriver,&gmode,"");
x31=10;
y31=20;
x32=625;
y32=400;
cout << "Introdu numarul de dreptunghiuri pe care sa le desenez : ";
cin >> n;
cleardevice();
setbkcolor(0);
rect1(x31,y31,x32,y32);
gold(n);
getch();
closegraph();
}

```

Anexa nr. 3

Numărul Phi cu 20.000 de zecimale

1.61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544
8622705260462818902449707207204189391137484754088075386891752
1266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383
2266131992829026788067520876689250171169620703222104321626954
8626296313614438149758701220340805887954454749246185695364864
4492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780
9158846074998871240076521705751797883416625624940758906970400
0281210427621771117778053153171410117046665991466979873176135
6006708748071013179523689427521948435305678300228785699782977
8347845878228911097625003026961561700250464338243776486102838
3126833037242926752631165339247316711121158818638513316203840
0522216579128667529465490681131715993432359734949850904094762
1322298101726107059611645629909816290555208524790352406020172
7997471753427775927786256194320827505131218156285512224809394
7123414517022373580577278616008688382952304592647878017889921
9902707769038953219681986151437803149974110692608867429622675
7560523172777520353613936210767389376455606060592165894667595
5190040055590895022953094231248235521221241544400647034056573
4797663972394949946584578873039623090375033993856210242369025

1386804145779956981224457471780341731264532204163972321340444
4948730231541767689375210306873788034417009395440962795589867
8723209512426893557309704509595684401755519881921802064052905
5189349475926007348522821010881946445442223188913192946896220
0230144377026992300780308526118075451928877050210968424936271
3592518760777884665836150238913493333122310533923213624319263
7289106705033992822652635562090297986424727597725655086154875
4357482647181414512700060238901620777322449943530889990950168
0328112194320481964387675863314798571911397815397807476150772
2117508269458639320456520989698555678141069683728840587461033
7810544439094368358358138113116899385557697548414914453415091
2954070050194775486163075422641729394680367319805861833918328
5991303960720144559504497792120761247856459161608370594987860
0697018940988640076443617093341727091914336501371576601148038
1430626238051432117348151005590134561011800790506381421527093
0858809287570345050780814545881990633612982798141174533927312
0809289727922213298064294687824274874017450554067787570832373
1097591511776297844328474790817651809778726841611763250386121
1291436834376702350371116330725869883258710336322238109809012
1101989917684149175123313401527338438372345009347860497929459
9158220125810459823092552872124137043614910205471855496118087
6426576511060545881475604431784798584539731286301625448761148
5202170644041116607669505977578325703951108782308271064789390
2111569103927683845386333321565829659773103436032322545743637
2041244064088826737584339536795931232213437320995749889469956
5647360072959998391288103197426312517971414320123112795518947
7817269141589117799195648125580018455065632952859859100090862
1802977563789259991649946428193022293552346674759326951654214
0210913630181947227078901220872873617073486499981562554728113
7347987165695274890081443840532748378137824669174442296349147
0815700735254570708977267546934382261954686153312095335792380
1460927351021011919021836067509730895752895774681422954339438
5493155339630380729169175846101460995055064803679304147236572
0398600735507609023173125016132048435836481770484818109916024
4252327167219018933459637860878752870173935930301335901123710
2391712659047026349402830766876743638651327106280323174069317
3344823435645318505813531085497333507599667787124490583636754
1328908624063245639535721252426117027802865604323494283730172
5574405837278267996031739364013287627701243679831144643694767

0531272492410471670013824783128656506493434180390041017805339
5058772458665575522939158239708417729833728231152569260929959
4224000056062667867435792397245408481765197343626526894488855
2720274778747335983536727761407591712051326934483752991649980
9360246178442675727767900191919070380522046123248239132610432
7191684512306023627893545432461769975753689041763650254785138
2463146583363833760235778992672988632161858395903639981838458
2764491245980937043055559613797343261348304949496868108953569
6348281781288625364608420339465381944194571426668237183949183
2370908574850266568039897440662105360306400260817112665995419
9368731609457228881092077882277203636684481532561728411769097
9266665522384688311371852991921631905201568631222820715599876
4684235520592853717578076560503677313097519122397388722468258
0571597445740484298780735221598426676625780770620194304005425
5015831250301753409411719101929890384472503329880245014367968
4416947959545304591031381162187045679978663661746059570003445
9701135251813460065655352034788811741499412748264152135567763
9403907103870881823380680335003804680017480822059109684420264
4640218770534010031802881664415309139394815640319282278548241
4510503188825189970074862287942155895742820216657062188090578
0880503246769912972872103870736974064356674589202586565739785
6085956653410703599783204463363464854894976638853510455272982
4229069984885369682804645974576265143435905093832124374333387
0516657149005907105670248879858043718151261004403814880407252
4406164290224782271527241120850657888387124936351068063651667
4322232776775579739927037623191470473239551206070550399208844
2603708790843334261838413597078164829553714321961189503797714
6300075559753795703552271449319132172556440128309180504500899
2187051211860693357315389593507903007367270233141653204234015
5374144268715405511647961143323024854404094069114561398730260
3951828168034482525432673857590056043202453727192912486458133
3441698529939135747869895798643949802304711696715736228391201
8127312916589952759919220318372356827279385637331265479985912
4632750300605925674549794350881192950568549325935531872914180
1136412187470752628106869830135760524719445593219553596104528
3031488391176930119658583431442489489856558425083410942950277
1975833522442912573649380754171137392437601435068298784932712
9975122868819604983577515877178041069713196675347719479226365
1901633977128473907933611119140899830560336106098717178305543

5403560895292908184641437139294378135604820389479125745077075
5751030024207266290018090422934249425906066614133228722698069
0145994511995478016399151412612525728280664331261657469388195
1064421673871800011004218483025809165433837492364118388856468
5143150063731904295148146942431460895254707203740556691306922
0990804819452975110650464281054177552590951871318883591476599
6041317960209415308585533238772538023272763297737214312796821
6716234421183201802881412747443168847218459392781435474099999
0722332030592629766112383279833169882539312620065037028844782
8666940447307947104761255865837529862362509998232335971550723
3838332440815257781933642626304330265895817080045127887311593
5587747217256494700051636672577153920984095032745112153687300
9121996295227659131637093968607271342692623154753304379933165
8110736964314217197943405639155121081081362626888569748068060
1169189417502722987415869917914534994624441940121978586013736
6082869072236514771391268742096651378756205918543288883417429
2090156313328319357562208971376563097850156315498245644586542
4792935722828750608481453351352181729587932991171003247622205
2194645105362450512988430871344439507244267351462861799183233
6459836963763272257569159723954383052086647474238151107927349
4836952396479268993698324917999502789500060459661313463363024
9499514808053290179029751825158750490074351879835118360327227
7260171740453557165885557829729106195819351710554825793070910
0576358699019297217995168731175563144485648100220014254540554
2927345883711602099479457208237804368718944805636891825802444
9963187834202749101533579107273362532890693347412380222201162
6277119308544850295419132004009998655666517756640953656197897
8183804510303565101315894589028718610869058939471368014845700
1836649564720329433437429894642741255143590584348409195487015
2361403173913903616440198455051049121169792001201999605069949
6640303508636929039410070194505320162348727632327324494396304
8089055425137972331475185207091025063685981679530481810073942
4531700238804759834323450414258431406361272109602282423378228
0902797659607771084939151748873168777135223900911711735091860
0654620099024975852779254278165970383495058010626155333691093
7846597710529750223173074121778344189411845965861029801877874
2744563866966127724503845860526415103040898257777544741153320
7640758816775149755380471162966777100587664615954967769270549
6239398570925507027406997814084312496536307186653371806058742

2425981653070525738345415770542921629981149175086113117657731
7209561565647869547448927132060806354577946241453106698374211
3798168963823533304477883169339728728918103664083269856988254
4385166758622899306964346848975148408790396476042036102060217
1739447026348763365439319522907738361673898117812424836557810
5034169451563626043003665743108476654877780128577923645418522
4472361713742292558415931356128663716703280721715533926463257
3067306391085410886808574283858828060230334140855039097353872
6134511962926415995212789311354431460152730902553827104325966
2267439037455636122861390783194335705900381487008986613153981
9585744233044197085669672229314273074138488278897558886079973
8704470203166834856941990965480298249319817657926829855629723
0106827772351627407838074318778273182119196952800516087915721
2882633796823127256287000150018292975772999357909491964076344
2861575713544427898383040454702710194580042582021202344580630
3450336581472185492036799899729353539196812133195165379745399
1114942444518303385884129040181781882137600665928494136775431
7451605409387110368715211640405821934471204482775960541694864
5398783262695480139150190389959313067031866167066371964025692
8671388714663118919268568269199527645799771827875946096161721
8868109454651578869122410609814197268619255478789926315359472
9228250805425169068140107817960218853307623055638163164019224
5450325765673925997651753080142716071430871886285983603746505
7134204670083432754230277047793311183666903232885306873879907
1359007403049074598895136476876086784432382482189306175703195
6380323081971936356727419643872625870615433072963703812751517
0406005057594882723856345156390526577104264594760405569509598
4088890376207995663880178618559159441117250923132797711380329
4376547509016516949650991607383393771583323024570194834740007
0437618671998483401631826008462619656284649118225688857521346
3754902541808338213835222452587267893795053759156035794546985
0910225622545500301757104946983348354532383526078709221930458
1782306012370753280678368541306584636788866433486249368010198
7827996306702595432651378060073863929085648308741576187418973
4584845014188976529341101372215864355991552711362332200352667
7859159890231446163321026519665907632061524383747619049531582
9688362650420948401056545891306298277172498096419594723404651
1041982134768935401803825695495628603924426415986748598228006
0353862839166201252826607493306196584965199979419393226017235

7107336425370830330114336249857536359704244464759989999508550
4135497755858593457659092653330725277541675843146693676780617
0350120038448748838233760344077515947781221883070900087386627
3620916607990502269892703218997603795098905910859103929673456
1461070030458192127389259926961062116764364243835014102040863
2149917815297968152237983224273753657008553469979655413859050
3268361602227884755470626984391088521030207686047068045568465
6049168649886061622295232390709809262930233795648217998163264
5827888877674520846371971063478923106675469355047615197781699
0258818404079275109018244827870525059769837535143062244509022
0238243982312550584162320718831930069360646468209659500654929
0109716186526367216107417136183776673327975626854801245657682
7903176039465553945231433875677303497915785885910116637484556
7584795271391860878254010423332985744274711896961048512640197
5043599092076621558998660736837623188358845081292950114665354
8281714484640568652465409078154716196257844695752625694551656
0151916402921798854890937328031465192224759003096571549050536
1043776868772619159528449204647868973473708598413845131621192
9720126342407736945459818650296592335345125684549745411298197
3587667072860161605620423063606613028149677344579773775055756
4665475256322648177116997857087122831543104569123262503497681
1524521744973961367488220464805196887543419695119331204502160
5142938484475452382127014383095785581361967830231068508084587
6952059053294683384904712099162556365034003439670828933698367
4230015751173851512691230661722764144216075129173418747143150
9324192491416096999867281582385925735982389484927491964615227
2273338746312138436262116379467062032630225055489580573083750
4612992311362991730694894073425883194839992741639509844396340
5763528471756276219278652253960872013108048640653439616887545
2534263098969517619019770963192258709342165955974471750157538
3767415222805706502806831433565249171997333584030641535507591
1597426436648284662813680217450590970589460274429263222221545
9450758046571206068639904308236939693208237490767561190171561
3054248133117152425684784633637700152044179165011682325752361
6049574970639082244344451035121904881983027600176680985096524
5439007199098034993026860675523879685292194732393352370086650
2214074645540372223434816757493731446409283790065391967740103
5586193618156683661686489239555496145282647289499416061580304
5867891461971728155451100056660542499691974102798740593276434

9537145251676946206985978809469501747302284142757188719409212
0913799405943037050436483860043464522799330292390186592268987
4992113256560557840142335426058951056203690720289393159204404
7683592763647996005964048607619891592981949508787860276634599
0540426377004590080327943472062982544525635647954299248819864
6136171314485773469953475577155491384239289401754034139973846
1694812934792422346097430196275230138286072244963809538384015
2656781976450758854785515549234523478164603306293884200995080
3260140918302574385770671025227243666905988908545015570754230
3166659247235289247025886247948875462527657272851511128782706
7345431024451523345654228431103967952829625019369893998347396
1763988095735415260145372964681473821843600521099472119416591
4947167052037922552096336458484680414477803021647286239992640
4836350877374782450163820089524032253437992579012926564015553
7754091751704419627285039126695956664877242967660367303453668
7340490791418869452147158279081572339691240399858693908551730
7980195554612851340891206108401221361707057043006056924685591
6468834773320856891412679428448041384682813256929148160109786
2726968668673739171189314622691348945804277898996081447095247
6290501926031164920686774331866154696689660182266357878875060
8856243562678932797354633904182108774638039216244772025672699
5963918246877884554971790385158392047483199031276224370662350
9251877543414010711233586590774812206376345901988422547272765
5290504399502524440391136582670813300580588209460310208261341
3691275729369928930299617308928436703152385897539873889368074
4152637379424050644876417176861355234326986572897046306918017
4277972173889859443284852057257588337563820150546720651674252
6818948516733280463076478132931326028932293660452102131898129
8766152624448748669389040617846991666541748508459797014617821
5845014919572109825089234517474512254327386819725864944588083
7713986850659840854577316541691740670521119491662863377322637
5347566637002212032752438999773600607404270297220363477804829
8834855189525079474605519940340110771169725644261005092059843
3625358470695971857626167766302117478783419756445018380410292
0324040882661734433909026352235050682858285443283961848092537
6130820115626869907999117084755586982150310073563240421988569
5842006824399269537844032022223746281476592306055474769368305
7654967769047115962550247450780962483744990802561375091562235
9081010534493941774294277091445166668700415228544638076615351

1415564878549360113874731038287733133883917096461748290631567
8806518276176579853502166599860746401267488412113009854993833
7106031962506702797524310119377335548537011694674858888363080
3332877395716562753403672721807056225623263741488334992899702
5897729922403694175074342731419415743246679457858603989407509
7356363688815672159676354380665593938934382075984061216064317
6644219026777737991455799450314687087162662265241335905699284
9400637274490882163524294802256633045855363633725176204907462
4062938962390622030424872688432377631733574205753997574373508
4096577921808800894205906625727823076927886564455637580126672
8095252737982803007663697692816484465127747382239706173856750
7146692748220374881122563994075227626464994658463674019559973
7028383931198848223355399649783331650084674912545229565124093
9096378409541690123467537528013908083086302265335238706927307
1984654649454979101134287154636695543437462154391886526085366
9743665305885621644116480689128373577943415306094784572709870
3797692134620596953884382676082765918177362766991872780375421
9954172428335791064520613736884708545165822193158645377018313
4018188272510999229176147118605291765514228811235662172416926
8062064884531761516427295358579837541237587610041547580559573
0122459276711895277333823356043374201321392804317053379463646
4283519930145767064918477077689598854216479733717696259439386
4807489363320109889364352832449413256931743832350925828642127
6209473432879984387198291625035886368857440896091619767553023
6361478401862718277088913603989330772930602967177602584180301
3347547440609321822266207705984247608263794138859860193520895
9821941885723823714271930349354518240112671046073097412681279
0727264386856815447291448267613899450920640987926476925746988
1233464299526730823740572040614374870086704861259959017842497
6845844736824827947824753176338174814799571031203396345226743
4151237223224546265463283535642466277864608398721791278430896
4163642223715282219986085060015824516947831892606016582749114
2774933502865503727691068107557826463340399219222602208590967
8418600138596538772658262446575976940692405418044447384716079
0144974301805588933762376129691822923476845375955646842112269
8731637506249971182291485689604472527760093934343558339195165
1329856236458931491018608496834803380909327362610620547959704
2129866988357356040434712839980124980220946685109349040787845
0102117684276345079137687609746900665759683043519266676563960

9226488456702128507448211848361029076891964934023006417531734
8391475891667202306924534710762771979252499732857689038868014
1780313799483651089527220946591304506656658258539174690486872
6499025467659665991645473651342597555773973485065284399773844
9051390582943013000836696145566974853779340788127721579148721
0719258869089277878732982982214574233273265987982756950898845
3062402230364863477229670565241270358878302819400749805754390
1628578674553132719765260710764315311239152607721936214434609
6089758726934223674331613718574577608117751518069662104795585
1401300697018450070262904794925708371201752793785549576273912
4558714833201017036184052163681801734142508980616063467633085
0504184585816629334093479199103685913053789482158651701181210
1133300066957752327866855180782567528361494949207458373368458
1369140797759592526727396642347874661439981964808103670506600
5238269165055144634711116867428177319502560642951637959659475
6449878914614469259366293093648048161740598082142543405252113
7133240811391357997162285810141910341046056929078249895621456
0041045692221416830893236662517618696271719453854998551484275
1733692412026801599280832014583007544847423312643878084780850
5610430490999936434590519518749484369677275747335967088334960
9157447435750398602016397666114276536952670441155200193914842
9346010151295311744588764830703716773961542655913990830375776
6302130990871271988706903293047012410586150639985299814175780
4303480803588203202011047607004755710169423412034108915643947
8253031645937304375581946867525349532301302767823535601166413
1117799609979366204344956968354793075431132755864318973151517
1064432189249793277801264964764475467078165807406131259375271
8474088161154798183078167510478092914139545646311605812690517
5395355691577558041067198123163840527755605227222376471188323
3223099585068971018717504781906533494858423259762256575841898
5291447178335173226029857862929434650563669321626276738162459
5741793269889232722066663608199249098883146852994099138673444
6049670842442978243630232938910355965601739942201988690257245
4714016330096121461872083651086881853340606220170995158270704
4233704218017669634913369599606432200532887349489313596603042
438080456594474333567831672703729636367594216999379522