Sistemul producatorului

Analiza sistemului producatorului este un subiect complex,cuprinzand urmatoarele trei categorii de probleme:teoria productiei,care are ca scop studierea modului in care factorii de productie sunt combinati pentru a produce bunuri sau servicii(outputuri);teoria costului productiei ,care are ca scop studierea modului in care se formeaza costul productiei;teoria firmei,care se ocupa cu modul de organizare a firmei.

In scopul definirii multimii posibilitatilor de productie la nivel de economie vom presupune ca intreaga activitate de productie din economie se compune dintr-un numar finit de firme , potentiale sau efective. Productia totala a economiei definita in acest fel va fi data de suma productiilor firmelor individuale.

Fie Yf o productie pentru firma f ,adica un vector al productiei.Atunci avem urmatoare relatie:

$$Y=\sum_{f=1}^{F} y_f$$

care se mai numeste si productie totala,oferta totala sau vector de productie al societatii.

Formand aceasta suma se elimina toate transferurile de marfuri de la producator la producator.Astfel de marfuri apar odata cu semnul plus cand sunt outputuri si cu semnul minus cand sunt inputuri.

Multimea posibilitatilor de productie la nivel de societate sau productia totala,notata Y este:

$$Y=\{y=\sum_{f=1}^{F} y_f \,/\, y_f \in Yf, \forall f\} = \sum_{f=1}^{F} y_f$$

Un vector de productie poate fi considerat ca posibil pentru o multime de firme daca este suma unor vectori ,fiecare posibil pentru o firma diferita din multime.Orice vector de productie posibil pentru o multime de firme este posibil pentru societate in ansamblu (adica pentru multimea tuturor firmelor).

Fie f1,f2,…,fk k firme distincte.Vom presupune ca $y_{fk} \in Y_{fk}$ si vom considera Yf=0 daca f este distinct de oricare dintre firmele fk.Avem:

$$\sum_{n} y_{f_n} = \sum_{f} y_f \in Y$$

Asupra posibilitatilor de productie se fac cateva ipoteze.Prima,afirma ca este totdeauna posibil ca firma sa nu se angajeze in nici o activitate.In mod normal ,procesul nul este posibil pentru orice tehnologie.Din acest motiv putem spune ca Yf contine originea.

Cea de-a doua ipoteza este mai mult o conventie si mai putin o ipoteza in adevaratul sens al cuvantului.Multimea Yf este inchisa.Formal ,aceasta ipoteza poate fi exprimata astfel:fie (y_f^2) un sir de productii.Daca y^q este un vector posibil pentru firma f,oricare ar fi q un numar natural atunci y0 este un program posibil ,o activitate posibila sau o actiune posibila pentru firma f.Cu alte cuvinte,aceasta inseamna ca daca exista activitati tehnologic posibil,arbitrar apropiate de o activitate data ,atunci includem activitatea data printre cele posibile.O restrictie mai tare impusa multimilor posibilitatilor de productie ale firmelor este aceea ca aceste multimi sunt convexe.

O productie totala posibila cu toate inputurile nule va conduce la toate outputurile nule.

Daca o productie totala y ale carei inputuri si outputuri nu sunt toate nule este posibila ,atunci productia totala nu este posibila.Procesele de productie nu pot fi inversate pentru ca ,in particular ,productia are loc in timp si marfurile sunt datate.In aceste conditii multimea Y este inchisa.

Tehnologiile firmei si comportamentul producatorului pot fi abordate si cu ajutorul functiei de productie.Functia de productie reprezinta o descriere formala a mecanismului dupa care inputurile sunt transformate in outputuri si masoara outputul maxim ce poate fi obtinut dintr-o cantitate data de inputuri.Functia de productie defineste regula dupa care marimile de intrare intr-un sistem microeconomic,numite si vector al factorilor de productie,sunt transformate in marimi de iesire sau outputuri.O functie de productie evidentiaza de fapt ceea ce este posibil din punct de vedere tehnic a se obtine cu anumite inputuri date.

Cu ajutorul functiei de productie ,restrictia tehnologica asupra comportamentului unei firme poate fi scrisa sub forma:

$$0 \leq y \leq F(x)$$

In cazul in care productia se desfasoara in asa fel incat dintr-un input dat se obtine output-ul maxim posibil ,productia se numeste eficienta din punct de vedere tehnic.

Proprietatile functiilor de productie:

-cantitatea de output si cantitatile din cei n factori de productie utilizati pentru obtinerea acestuia sunt marimi nenegative;

-outputul si factorii de productie sunt considerati a avea proprietatea de divizibilitate perfecta ;aceasta inseamna ca marimilee x1,..,xn sunt marimi continue,iar functia de productie este continua.

-outputul nu este invariant la schimbarea unitatilor de masura ale factorilor de productie ,adica:

$F(x1,....xn) \neq F(\lambda 1x1,....,\lambda nxn)$ cu $\lambda 1,...\lambda \mathrm{n} > 0$

-absenta factorilor de productie determina obbtinerea unui output nul;aceasta proprietate poate fi exprimata matematic sub forma urmatoare:

$\lim_{\lambda -> 0} F(\lambda x1,....., \lambda xn) = 0$

-cresterea cantitatii utilizate din oricare faaaactor de productie determina cresterea outputului ,adica functia de productie este monoton crescatoare in raport cu fiecare diin argumentele sale;aceasta inseamna ca daca $x_i^{'} \geq x_i$ atunci:

$F(x1,..., x_i^{'},..., xn) \geq F(x1,...., xi,...., xn)$

-functia de productie este de cel putin doua ori derivabila,derivatele partiale ale acesteia,in raport cu fiecare din cei n factori de productie reprezentand eficientele marginale ale factorilor.

Functiile de productie pot fi caracterizate si analizate prin intermediul definirii unei multimi de indicatori specifici.

Indicatorii medii se calculeaza pentru fiecare din factorii de productie utilizati si arata cate unitati de output revin ,in medie,la fiecare unitate de input.

$$M_{x_i}(x1,...,xn)=\frac{y}{xi}=\frac{F(x1,...,xn)}{xi}$$

Indicatorii marginali se calculeaza pentru fiecare factor de productie,ca raport intre cresterea outputului determinata de modificarea cantitatii dintr-un faactor de productie si cantitatea cu care se modifica factorul de productie respectiv,in conditiile in care cantitatile utilizate din ceilalti factori raman neschimbate ,si arata cu cate unitati se modifica outputul atunci cand cantitatea dintr-un anumit bun creste cu o unitate.Indicatorii marginali se mai numesc si eficiente marginale sau diferentiale ale factorilor de productie.

$$\eta_{x_i}(x1,...,xn)=\frac{dF(x1,...,xn)}{dx_i}$$

Indicatorii procentuali arata cu cate procente se modifica outputul la cresterea cu un procent a inputului considerat.

$$E_{x_i}(x1,...,xn)=\frac{dF(x1,...,xn)}{dx_i}:\frac{f(x1,...,xn)}{xn}$$

O clasa speciala a functiilor de productie este reprezentata de functiile de productie cu progres tehnic.Reflectarea progresului tehnic in cadrul functiilor de productie se face prin intermediul variabilei timp.In functie de modalitatea in care influenta progresului tehnic este luata in considerare in constructia functiilor de productie pot fi definite doua tipuri de progres:progres tehnic neincorporat si progres tehnic incorporat.

Progresul tehnic neincorporat este definit ca fiind acea forma de progres tehnic ce actioneaza in mod uniform si nediferentiat prin intermediul componentelor celor doi factori de productie.Functiile de productie cu progres tehnic neincorporat nu iau in considerare ,de exemplu,diferentele tehnologice care exista intre generatiile mai noi si mai vechi ale capitalului fix sau diferentele care exista intre nivelurile de instruire ale contingentelor diferite de forta de munca.O forma particulara a progresului tehnic neincorporat este cea reprezentata de progresul tehnic neutral ,specific functiilor de productie construite pe baza ipotezei ca relatiile dintre annumiti indicatori ai acestora sunt invariante in timp.

Progresul tehnic incorporat este definit ca fiind acea forma de progres tehnic ce actioneaza in mod diferentiat prin intermediul componentelor diferite ale celor doi factori de productie ,actiunea sa fiind mai puternica in cazul generatiilor mai noi ale factorilor de productie.

$$y(t)=\sum_{t=0}^{n}y_{t-\tau}(t)=\sum_{\tau=0}^{n}f(x_{t-\tau,1}(t),x_{t-\tau,2}(t),t-\tau)$$

In continuare sunt descrise modalitatile de comportare a producatorului ,evidentiind conditiile pentru care alegerea este optimala.

Obictivul productiei este de a maximiza profitul ,deci: $px-\sum_{i=1}^{n}q_i\upsilon_i$

unde p este pretul outputului iar q sunt preturile inputurilor considerate a fi constante pe piata.Lagrangianul asociat acestei probleme este:

$$L(\upsilon 1,...,\upsilon n,\lambda) = px - \sum_{i=1}^{n} q_i \upsilon_i + \lambda[f(\upsilon 1,...,\upsilon n) - x]$$

Punctul stationar al Lagrangianului este determinat prin conditiile de ordinI:

Obtinem:

$$\frac{df/d\upsilon 1}{q1} = \frac{df/d\upsilon 2}{q2} = ... = \frac{df/d\upsilon n}{qn} = \frac{1}{\lambda}$$

Primele n-1 ecuatii definesc o curba in spatiul vectorilor R^n,curba care se numeste cale expansionista sau de substitutie.

Ratele de substitutie definite prin:

$S_{ij} = \frac{df/d\upsilon_j}{df/d\upsilon_i}$ cu restrictiile:Sij=1 si Sij=Sik*Skj.Acestea sunt egale cu raportul preturilor inputurilor corespunzatoare.

Presupunem in continuare ca avem o solutie interioara.Oconditie suficienta de ordin doi pentru a avea un maxim global pentru problema:

$$\begin{cases} \max\limits_{\upsilon}[px^0 - \sum_{i=1}^{n} q_i \upsilon_i \\ x0 = f(\upsilon 1,\upsilon 2,...,\upsilon n) \end{cases}$$

reprezinta restrictia problemei,este:

$\lambda^{n-1}(-1)^t D_t > 0$

Ecuatiile pot fi scrise sub forma:

$$\frac{df/d\upsilon_i}{df/d\upsilon_1} = \frac{qi}{q1}$$

Modelul liniar generalizat de productie se caracterizeaza prin urmatoarele ipoteze:

a)existenta unui numar finit de activitati de baza-inputurile necesare precum si outputurile produse pe o unitate de masura a nivelului la care opereaza procesul sunt exprimate prin coeficienti ficsi;

b)procesele sunt liniare,in sensul urmator:daca un proces ce opereaza la nivelul unei unitati de masura furnizeaza un output b_i din marfa i si foloseste o cantitate a din marfa r,procesul poate opera la orice $\mu(\mu > 0)$ dand o productie $\mu_i b$ din marfa i si folosind o cantitate μrb marfa r;

c)procesele pot fi combinate liniar in asa fel incat ,daca la nivelul unei unitati de masura activitatile j,k produc cantitati b_{ij} si b_{jk} din marfa i si consuma cantitatile a_{rj} si a_{rk} din marfa r ,operarea simultana la nivelele $\mu j \mu_k$ va fi asociata urmaatoarelor totaluri:

$\mu_{jj} b_{ij} + \mu_k b_{ik}, \mu_j a_{rj} + \mu_k a_{rk}$

Daca marfa i este rezultatul unei activitati j si reprezinta un input pentru activitatea k,atunci totalul asociat $\mu_j b_{ij} - \mu_k a_{ik}$ reprezinta un output net dat de activitatile combinate daca este pozitiv si un input net absorbit de activitatile combinate in cazul in care el este negativ.

Presupunem ca intr-o economie se produc in total n marfuri.Atunci putem asocia fiecarei activitati doi vectori n-dimensionali.

Vectorul outputurilor bj,al procesului j,este un vector nenegativ cu componentele bij care sunt pozitive daca marfa i este produsa de activitatea respectiva si nule daca ea nu este produsa.

Vectorul inputurilor ai este nenegativ avand componentele a_{ij} care sunt pozitive daca marfa i este input si nule in caz contrar.

O marfa care este si output si input pentru aceeasi activitate este data in valoare neta ,deci ea apare fie ca output net ,fie ca input net.

In cazul in care exista m activitati,asamblam vectorii outputurilor intr-o matrice B,a outputurilor si toti vectorii inputurilor intr-o matrice A,a inputurilor.Ambele matrici au ordinul mxn.

Matricea tehnologica este matricea B-A.Ea este o matrice ce contine un element b_{ij} daca marfa i este rezultatul activitatii j,un element a_{ij} daca marfa i este un input pentru activitatea j,un element nul in pozitia ij daca marfa i nu este nici necesara nici rezultatul activitatii j

Vom presupune in continuare ca procesele opereaza la nivelul indicat de vectorul x,x=(B-A)y.

Desi marimea y este neaparat nenegativ,nu acelasi lucru se intampla cu marimea x.O componenta a vectorului x poate avea orice semn:

a)daca xi>0,i este un output final al sistemului care opereaza la nivelul y;

b)daca xi=0,i este un bun intermediar pur al sistemului care opereaza la nivelul y;

c)daca xi<0,este un input primar al sistemului care opereaza la nivelul y.

Multimea productiei este multimea tuturor vectorilor x,ai outputurilor, care pot fi produsi data fiind o anumita tehnologie si nefiind impuse restrictii asupra resurselor.Aceasta multime mai este intalnita si sub denumirea de multime accesibila sau multime de transformare.

Intrucat procesele pot opera la orice nivel nenegativ,multimea productiei X poate fi formal definita astfel:

X={x/x=(B-A)y,y>0}

iar elementele sunt rezultatul aplicatiei liniare X=(B-A)y in timp ce y ia valori pe intreaga axa nenegativa inchisa.

Natura liniara a transformarii definite anterior permite formularea urmatoarelor proprietati:

a)$0 \in X$;

b)X este multime convexa;
X= $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (B-A)(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) = (B-A)y$
c)X este inchisa ca rezultat al unei transformari liniare a unei multimi inchise;
d)X este o multime convexa ,inchisa ce contine pe kx daca il contine pe x ,pentru orice scalar k>0 ea este un con.Este un con poliedric convex intrucat numarul activitatilor este finit.

Modelul Smithies este un model care evidentiaza evolutia principalilor indicatori in corelatie cu potentialul maxim de productie Bt reprezentat prin capacitatea totala de productie in economie ,si cu nivelul programat a fi relizat $\overline{Yt}$.

Forma structurala a modelului:

$$\begin{cases} Yt = Ct + It \\ Ct = \alpha 1 \mathrm{Yt} + \alpha 2 \tilde{\mathrm{Y}}2, cu\alpha 1, \alpha 2 < 1 \\ \mathrm{It} = \beta 1 Y_{t-1} + \beta_2 \tilde{Y}_t - \beta_3 (B_{t-1} - Y_{t-1}) + g_1(t) \text{ ,cu } \beta 1, \beta 2 \in (0,1), \beta 3 > 0 \\ \mathrm{B}_{\mathrm{t}} = B_{t-1} - \gamma_1 B_{t-1} + \gamma_2 I_t - \gamma_3 (B_{t-1} - Y_{t-1}) + g_2(t) \text{, cu } \gamma, , \gamma_2 \in (0,1), \gamma_3 > 0 \end{cases}$$

Ecuatia (1) este o ecuatie de echilibru ,care arata ca produsul national brut sau net se constituie ca suma consumului individual si social Ct cu investitiile totale It ,brute sau nete.

Ecuatia (2) reflecta formarea consumului ,pus in dependenta atat de nivelul produsului realizat cat si a nivelului programat $\tilde{Y}_t$.

Ecuatia (3) reflecta formarea investitiilor in functie de nivelul realizat in anul precedent Y_{t-1} de nivelul programat $\tilde{Y}_t$ dar si de excedentul de capacitate ($B_{t-1} - Y_{t-1}$) inregistrata in perioada anterioara.; astfel ,daca capacitatea ramane neutilizata atunci trebuie reduse investitiile si in consecinta coeficientul β_3 intervine cu semnul - .Componenta g1(t) reflecta influenta progresului tehnic (tehnologii moderne induc o amplificare a potentialului capitalului investit).Putem reprezenta aceasta componenta prin ritmul progresului tehnic , $\lambda_1{}^t, \lambda_1 > 1$.

Ecuatia (4) reflecta evolutia potentialului economic maxim:dependenta de nivelul anterior , diminuat cu scoaterea din functiune a capitalului fix uzat ,cresterea cu investitiile materializate in capacitati , diminuata prin uzura morala (coeficientul γ_3 cuantifica efectul de reducere a capacitatii nominale prin uzura morala) so amplificata prin progresul tehnic g2(t) ,cu ritmul progresului tehnic λ_2.

Exista 4 scenarii:

1) $Y_t < \tilde{Y}_t < B_t$

2) $Y_t = \tilde{Y}_t < B_t$

3) $Y_t = \tilde{Y}_t = B_t$

4) $\tilde{Y} < Y_t < B_t$

Evident,in fiecare din acestea atat nivelul programat cat si cel realizat nu pot depasi potentialul maxim ;dar nivelul realizat poate fi sub nivelul programat sau il poate depasi.

Modelul scris sub reprezentarea structurala (1)-(4) poate fi adus la forma redusa , inlocuind in ecuatia (1) expresiile lui Ct si It date prin (2) si (3) si in ecuatia (4) pe (3):

$$\begin{cases} Y_t = \alpha_1 Y_t + \alpha_2 \tilde{Y}_t \; \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \tilde{Y}_t - \beta_3 (B_{t-1} - Y_{t-1}) + g1(t) \\ B_t = (1-\gamma_1) B_{t-1} + \gamma_2 \beta_1 Y_{t-1} + \gamma_2 \beta_2 \tilde{Y}_t - \gamma_2 \beta_3 (B_{t-1} - Y_{t-1}) - \gamma_3 (B_{t-1} - Y_{t-1}) + \gamma_2 g1(t) + g2(t) \end{cases}$$

Ecuatia nivelului produsului national este :

$$Y_t = \frac{\beta 1 + \beta 3}{1-\alpha 1} Y_{t-1} - \frac{\beta 3}{1-\alpha 1} B_{t-1} + \frac{\alpha 2 + \beta 2}{1-\alpha 1} \tilde{Y}_t + \frac{g1t)}{1-\alpha} \quad (1'')$$

Ecuatia potentialului maxim:

$$B_t = (1 - \gamma_1 - \gamma_2 \beta_3 - \gamma_3) B_{t-1} + [\gamma_2 (\beta_1 + \beta_3) + \gamma_3] Y_{t-1} + \gamma_2 \beta_2 \tilde{Y}_t + \gamma_2 g1(t) + g2(t)$$

unde nivelul programat este fixat exogen.

In cazul cand cerem ca nivelul realizat sa fie cel programat ecuatia produsului national devine:

$$Y_t = \frac{\beta 1 + \beta_3}{1 - (\alpha 1 + \alpha 2 + \beta 2)} Y_{t-1} - \frac{\beta_3}{1 - (\alpha 1 + \alpha 2 + \beta 2)} B_{t-1} + \frac{g1(t)}{1 - (\alpha 1 + \alpha 2 + \beta 2)}$$

care evidentiaza un mecanism feed-back cu 3 operatori de reglare in paralel,cu intensitatea $\alpha 1, \alpha 2$ si $\beta 2$ deci actionand prin consum si printr-o componenta a investitiilor,mecanism care induce efecte de multiplicare a nivelului anterior al produsului national ,ale potentialului maxim si ale progresului tehnic.

Notand multiplicatorii respectiv cu $b1 = \frac{1}{1-(\alpha 1 + \alpha 2 + \beta 2)}$ si $a_{11} = (\beta 1 + \beta 3) b1$

$a_{12} = \beta 3 * \mathrm{b1}$, ecuatia produsului national devine:

$$Y_t = a_{11} Y_{t-1} - a_{12} B_{t-1} + b_1 g1(t)$$

Inlocuim in ecuatia potentialului maxim pe $\tilde{Y}_t$ cu Yt gasit ,obtinem:

$$B1 = a21 Y_{t-1} + a22 B_{t-1} + \gamma 2(\beta 2 * \mathrm{b1} + 1) g1(t) + g2(t)$$

unde

a22=(1-$\gamma 1 - \gamma 2 \beta 3 - \gamma 3 - \gamma 2 \beta 2 \alpha 12)$

$a21 = [\gamma 2(\beta 1 + \beta 3 + \beta 2 \mathrm{a11}) + \gamma 3]$

Notand $\beta 2 = \gamma 2(\beta 2 * \mathrm{b1} + 1)$ am gasit forma redusa a,cu doua variabile de stare ,pentru modelul dat

$$\begin{cases} Y_{t-1} = a11Y_t - a12B_1 + b1g1(t+1) \\ B_{t-1} = a21Y_t + a22B_t + b_2 g_1(t+1) + g2(t+1) \end{cases}$$

Notand $Xt = \begin{pmatrix} Yt \\ Bt \end{pmatrix}$ vectorul de stare ,obtinem forma matriceala:

$X_{t-1} = A * Xt + G * g(t+1)$

unde :

$A = \begin{pmatrix} a11 & \text{-a12} \\ a21 & \text{a22} \end{pmatrix}, \mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{b1} & 0 \\ \mathrm{b2} & 1 \end{pmatrix} \text{si g(t)} = \begin{pmatrix} \mathrm{g1(t)} \\ \mathrm{g2(t)} \end{pmatrix}$

Determinarile numerice se fac iterativ:X0 -> X1 ->X2 ->….., cunoscanddatele initiale $X0 = \begin{pmatrix} Y0 \\ B0 \end{pmatrix}$

Si functiile exogene g1(t)= λ_1^{t} si g2(t)= λ_2^{t}

Analiza calitativa evvidentiaza componenta proprie ,in functie de valorile proprii $\mu 1$ si $\mu 2$, obtinute di ecuatia caracteristica a procesului de evolutie si componenta de dirijare ,in functie de ritmul progresului tehnic in investitii si in cresterea poentialului maxim.

Ecuatia caracteristica este:

$\det(A - \mu \mathrm{I}) = 0$ deci:

$\mu^2 - \mu(a11 + a22) + a11a22 + a12a21 = 0$

deci componenta proprie pentru $\mu 1 \neq \mu 2$,are expresia

$X_1^p = c1\mu_1^t + c2\mu_2^t$,unde c1 si c2 sunt vectori coloana constanti.

Componenta de dirijare este $X_t^D = \Lambda^t d$,unde $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda 1 & 0 \\ 0 & \lambda 2 \end{pmatrix}$ si deci

$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}$ iar vectorul d se deduce din ecuatia 7

Prin urmare evolutia produsului national si a potentialului maxim este descrisa de vectorul Xt,avand componentele:

$$\begin{cases} Yt = c11\mu_1^t + c12\mu_2^t + d\lambda_1^{t-1} + d12\lambda_2^{t-1} \\ Bt = c21\mu_1^t + c22\mu_2^t + d21\lambda_1^{t-1} + d22\lambda_2^{t-1} \end{cases}$$

in care dij sunt elementele matricei $D=(\Lambda-A)^{-1}*G$ si coeficientii cij se determina din datele initiale y0, $\beta 0$ astfel:
-pentru t=0 se obtin 2 ecuatii in cij;
-inlocuind Yt si Bt din sistem in (5)si (6) si facand t=0 se obtin celelalte 2 ecuatii.

In concluzie ,evolutia produsului national este dependenta de 4 ritmuri de crestere:cele 2 valori proprii $\mu 1$ si $\mu 2$ care reflecta structura interna a sistemului economic si cele doua ritmuri exogene ale progresului tehnic $\lambda 1$ si $\lambda 2$ rezultate din decizia de investitii in tehnologii noi ,moderne si decizia de retehnologizare si modificari a capacitatilor existente.

Si in acest caz,traiectoriile de evolutie pot fi monotone sau oscilante ,cu oscilatii proprii,daca valorile proprii $\mu 1$ si $\mu 2$ sunt complexe sau cu oscilatii improprii ,daca $\mu 1$ si $\mu 2$ sunt reale ,cu cel putin una negativa.

Daca matricea de trecere A indeplineste cerintele teoremei Perron-Frobenius ,daca A este pozitiva si nedecompozabila ,exista valoarea proprie dominanta μ^* =max($\mu 1$ $\mu 2$), pozitiva si unica atasat ei , vectorul propriu $C^*=\begin{pmatrix} C1^* \\ C2^* \end{pmatrix}$,pozitiv si singurul cu aceasta proprietate ,care defineste traiectoria de cresteree eficienta si echilibrata $X_t^*=(\mu_1^*)c$
Cu cat starea initiala (Y0,B0) este mai apropiata de structura reflectata prin vectorul propriu C ,cu atat evolutia reala se afla mai aproape de cea indicata de TEE(traiectoria eficienta si echilibrata) care asigura cel mai inalt ritm de crestere obiectiv determinat de conditiile interne economice.

Se constata ca cerinta de nedecompozabilitate este asigurata; cum a11 si a21 sun strict pozitive ,cerinta de pozitivitatee depinde de coeficientii a12 si a22,deci cand a12<0 si a22>0.

Aplicatie

Consideram urmatoarele determinari econometrice ale parametrilor modelului:
$\alpha 1=0{,}75; \alpha 2=0{,}05$
$\beta 1=0{,}15; \beta 2=0{,}05; \beta 3=0{,}1; \lambda 1=1{,}02$
$\gamma 1=0{,}05; \lambda 2=0{,}6; \lambda 3=0{,}05; \lambda 2=1{,}01$
Datele initiale Y0=1000;B0=1200(miliarde lei)
a)sa se scrie modelul in reprezentarea ecuationala structurala si forma redusa. Sa se proiecteze evolutia in conditiile cand $\tilde{Y}(t)=Y(t)$ si sa se analizeze caracteristicile calitative ale procesului de evolutie.

$$\begin{cases} Ct=0{,}75Yt+0{,}05\tilde{Y}_t \\ It=0{,}15Y_{t-1}+0{,}05\tilde{Y}_t-0{,}1(B_{t-1}-Y_{t-1})+g1(t) \\ Bt=0{,}95B_{t-1}+0{,}6It-0{,}05(B_{t-1}-Y_{t-1})+g2(t) \end{cases}$$

In scenariul $\tilde{Y}_t = Y_t$,obtinem

$$\begin{cases} Ct = 0{,}8Yt \\ It = 0{,}05Yt + 0{,}25Y_{t-1} - 0{,}1B_{t-1} + g1(t) \end{cases}$$

deci sub forma redusa :

$$Y_t = \frac{5}{3}Y_{t-1} - \frac{2}{3}B_{t-1} + \frac{20}{3}g1(t)$$

Ecuatia potentialului este:

$$B_t = 0{,}95B_{t-1} + 0{,}6[0{,}05Yt + 0{,}25Y_{t-1} - 0{,}1B_{t-1} + g1(t)] - 0{,}05(B_{t-1} - Y_{t-1}) + g2(t)$$

adica:

$$B_t = 0{,}82B_{t-1} + 0{,}03Y_t + 0{,}2Y_{t-1} + 0{,}6g1(t) + g2(t)$$

si inlocuind Y_t se obtine a doua ecuatie a modelului in variabile de stare:

$$B_t = 0{,}82B_{t-1} + 0{,}25Y_{t-1} + 0{,}8g1(t) + g2(t)$$

unde g1(t)= λ_1^t si g2(t)= λ_2^t

Deci modelul corespunzator in variabile de stare este:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = \frac{5}{3}Y_t - \frac{2}{3}B_t + \frac{20}{3}g1(t+1) \\ B_{t+1} = 0{,}25Y_t + 0{,}82B_t + 0{,}8g1(t) + g2(t) \end{cases}$$

Determinari numerice:cu datele initiale Y0=1000;B0=1200 gasim:

$$\begin{cases} Y1 = 873{,}6 \\ B1 = 1235{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y2 = 638{,}83 \\ B2 = 1234{,}08 \end{cases}$$

ceea ce indica o reducere progresiva a produsului national ,cu toate ca potentialul maxim ramane ridicat(chiar daca descreste lent).

Analiza calitativa:valorile proprii sunt solutiile ecuatiei caracteristice:

$$\det(A - \mu I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{3} - \mu & -\frac{2}{3} \\ 0{,}25 & 0{,}82 - \mu \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3\mu^2 - 7{,}46\mu + 4{,}6 = 0$$

de unde rezulta ca $\mu 1 = 1{,}35$ si $\mu 2 = 1{,}13$

Deci conform rezultatelor ,gasim:

$$\begin{cases} Yt = c11*1{,}35^t + c12*1{,}13^t + d11*1{,}02^{t+1} + d12*1{,}01^{t+1} \\ Bt = c21*1{,}35^t + c22*1{,}13^t + d21*1{,}02^{t+1} + d22*1{,}01^{t+1} \end{cases}$$

care evidentiaza cele 4 ritmuri de crestere sub impactul carora se realizeaza evolutia,intensitatea cu care actioneaza fiind data de coeficientii c $_{ij}$ si d $_{ij}$

Coeficientii d $_{ij}$ sunt ponderile de actiune a componentei de dirijare, aici prin politica de modernizari,restructurari si progres tehnic,deci elementele matricei D=(M-A)$^{-1}$*G ,unde:

$$M = (diag\ \mu_j) = \begin{pmatrix} 1{,}35 & 0 \\ 0 & 1{,}13 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-2}{3} \\ 0{,}25 & 0{,}82 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 0 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtine:

$$D=\begin{pmatrix} 5{,}786 & -2{,}517 \\ 7{,}249 & 1{,}195 \end{pmatrix} = (d_{ij})$$

Pentru t=0:
c11+c12=996,64
c21+c22=1191,34

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}35c_{11} + 1{,}13c_{12} = Y_t - d11*1{,}02^2 + d12*1{,}01^2 = 870{,}15 \\ 1{,}35c_{11} + 1{,}13c_{12} = B1 - d21*1{,}02^2 + d22*1{,}01^2 = 1227{,}04 \end{cases}$$

Din aceeste sisteme de 4 ecuatii obtinem cei 4 coeficienti:
C11=-1163,87
C12=2160,52
C21=-541,7
C22=1733,04