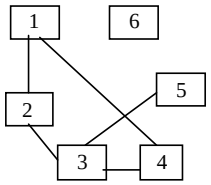
Grafuri neorientate

Graf = orice mulţime finită **V** prevăzută cu o relaţie binară internă **E**. Notăm graful cu **G=(V, E)**.

Graf neorientat = un graf **G=(V, E)** în care relaţia binară este simetrică: **(v,w)∈E** atunci **(w,v) ∈E.**

Nod = element al mulţimii **V**, unde **G=(V, E)** este un graf neorientat.

Muchie = element al mulţimii **E** ce descrie o relaţie existentă între două vârfuri din **V**, unde **G=(V, E)** este un graf neorientat;



In figura alaturata:
V={1,2,3,4,5,6} sunt noduri
E={[1,2], [1,4], [2,3],[3,4],[3,5]} sunt muchii
G=(V, E)=({1,2,3,4,5,6}, {[1,2], [1,4], [2,3],[3,4],[3,5]})

Adiacenta: Într-un graf neorientat existenţa muchiei **(v,w)** presupune că **w** este adiacent cu **v** şi **v** adiacent cu **w**.

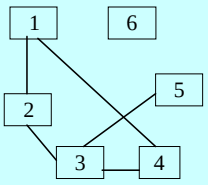
În exemplul din figura de mai sus vârful **1** este adiacent cu **4** dar **1** şi **3** nu reprezintă o pereche de vârfuri adiacente.

Incidenţă = o muchie este incidentă cu un nod dacă îl are pe acesta ca extremitate. Muchia **(v,w)** este incidentă în nodul **v** respectiv **w**.

Grad = Gradul unui nod **v**, dintr-un graf neorientat, este un număr natural ce reprezintă numărul de noduri adiacente cu acesta (sau numarul de muchii incidente cu nodul respectiv)

Nod izolat = Un nod cu gradul **0.**

Nod terminal= un nod cu gradul **1**

	Nodul **5** este terminal (gradul **1**). Nodul **6** este izolat (gradul **0**) Nodurile **1, 2, 4** au gradele egale cu **2**.

Lanţ = este o secvenţă de noduri ale unui graf neorientat **G=(V,E)**, cu proprietatea că oricare două noduri consecutive din lant sunt adiacente:
$L=[w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n]$ cu proprietatea că **$(w_i, w_{i+1})\in E$** pentru **$1\le i<n$.**

Lungimea unui lanţ = numărul de muchii din care este format.

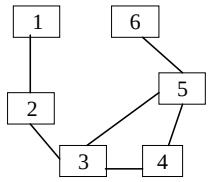
Lanţ simplu = lanţul care conţine numai **muchii distincte**

Lanţ compus= lanţul care **nu este** format numai din muchii distincte

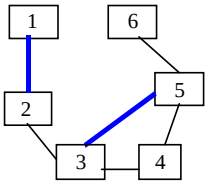
Lanţ elementar = lanţul care conţine numai **noduri distincte**

Ciclu = Un lanţ în care primul nod coincide cu ultimul.

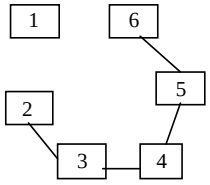
Ciclul este elementar dacă este format doar din noduri distincte, excepţie făcând primul şi ultimul. Lungimea unui ciclu nu poate fi 2.

	Succesiunea de vârfuri **2, 3, 5, 6** reprezintă un lanţ simplu şi elementar de lungime **3**. Lanţul **5 3 4 5 6** este simplu dar nu este elementar. Lanţul **5 3 4 5 3 2** este compus şi nu este elementar. Lanţul **3 4 5 3** reprezintă un ciclu elementar

Graf partial = Dacă dintr-un graf **G=(V,E)** se suprimă cel puţin o muchie atunci noul graf **G'=(V,E')**, **E'⊂ E** se numeşte graf parţial al lui **G**.

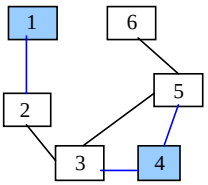


G

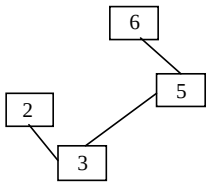


G1 este graf partial al lui G

Subgraf = Dacă dintr-un graf **G=(V,E)** se suprimă cel puţin un nod împreună cu muchiile incidente lui, atunci noul graf **G'=(V',E')**, **E'⊂ E si V'⊂V** se numeşte subgraf al lui **G**.

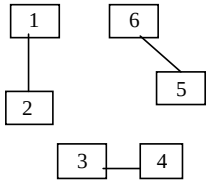


G

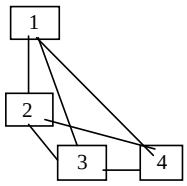


G1 este subgraf al lui G

Graf regulat = graf neorientat în care toate nodurile au acelaşi grad;

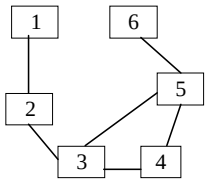


Graf complet = graf neorientat **G=(V,E)** în care există muchie între oricare două noduri.
Numărul de muchii ale unui graf complet este: **nr*(nr-1)/2.**Unde nr este numarul de noduri

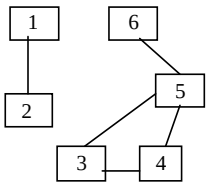


graf complet. Nr de noduri: 4x(4-1)/2 = 6

Graf conex = graf neorientat **G=(V,E)** în care pentru orice pereche de noduri **(v,w)** există un lanţ care le uneşte.

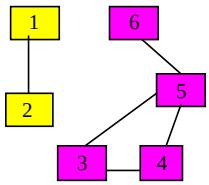


graf conex



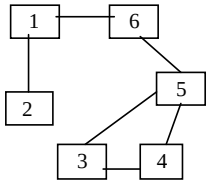
nu este graf conex

Componentă conexă = subgraf al grafului de referinţă, maximal în raport cu proprietatea de conexitate (între oricare două vârfuri există lanţ);



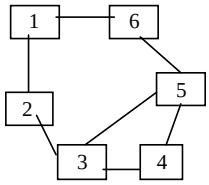
graful nu este conex. Are 2 componente conexe:
1, 2 si 3, 4, 5, 6

Lanţ hamiltonian = un lanţ elementar care conţine toate nodurile unui graf



L=[2 ,1, 6, 5, 4, 3] este lant hamiltonian

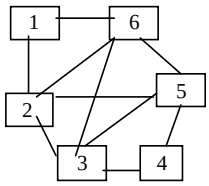
Ciclu hamiltonian = un ciclu elementar care conţine toate nodurile grafului



C=[1,2,3,4,5,6,1] este ciclu hamiltonian

Graf hamiltonian = un graf G care conţine un ciclu hamiltonian
Graful anterior este graf Hamiltonian.

Lanţ eulerian = un lanţ simplu care conţine toate muchiile unui graf



Lantul: L=[1.2.3.4.5.3.6.2.5.6] este lant eulerian

Ciclu eulerian = un ciclu simplu care conţine toate muchiile grafului
Ciclul: C=[1.2.3.4.5.3.6.2.5.6.1] este ciclu eulerian

Graf eulerian = un graf care conţine un ciclu eulerian.

Condiţie necesară şi suficientă: Un graf este eulerian dacă şi numai dacă oricare vârf al său are gradul par.

Reprezentarea grafurilor neorientate

Fie **G=(V, E)** un graf neorientat.

Exista mai multe modalitati de reprezentare pentru un graf neorientat, folosind diverse tipuri de structuri de date. Reprezentarile vor fi utilizate in diversi algoritmi si in programele care implementeaza pe calculator acesti algoritmi.

Matricea de adiacentã matricea booleanã

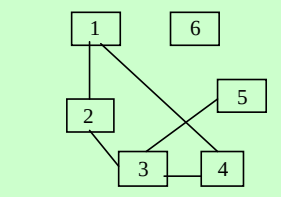
Matricea de adiacentã asociatã unui graf neorientat cu n noduri se defineste astfel: $A = (a_{ij})_{n \times n}$ cu

$$a[i,j] = \begin{cases} 1, \text{ daca } [i,j] \in E \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Observatii:

- Matricea de adiacenta asociatã unui graf neorientat este o matrice simetricã
- Suma elementelor de pe linia k reprezintã gradul nodului k
- Suma elementelor de pe coloana k reprezintã gradul nodului k

Fie graful din figura urmatoare:



A=
0 1 0 1 0 0 nodul 1 are gradul 2
1 0 1 0 0 0 nodul 2 are gradul 2
0 1 0 1 1 0 nodul 3 are gradul 3
1 0 1 0 0 0 nodul 4 are gradul 2
0 0 1 0 0 0 nodul 5 are gradul 1
0 0 0 0 0 0 nodul 6 are gradul 0

Numarul de noduri este 6 si numarul de muchii este 4
Matricea este simetrica si patratica avand 6 linii si 6 coloane
Diagonala principala contine numai valori nule

Pentru a prelucra graful se citesc:
6- reprezentand n, numarul de noduri
4- reprezentand m, numarul de muchii
4 perechi x-y reprezentand extremitatile celor 4 muchii:
1-2 => a[1,2]=a[2,1]=1
1-4 => a[1,4]=a[4,1]=1
2-3 => a[2,3]=a[3,2]=1
3-4=> a[3,4]=a[4,3]=1
3-5 => a[3,5]=a[5,3]=1

Probleme propuse:

Problema 1

Se citeste un graf din fisierul graf.txt: numarul de noduri, numarul de muchii si muchiile.
a) sa se afiseze matricea de adiacente
b) Sa se determine gradul unui nod citit
c) Sa se afiseze pentru un nod citit nodurile adiacente
d) sa se afiseze nodurile incidente cu cea de a x muchie din matrice
e) sa se afiseze pentru fiecare nod gradul
f) sa se afiseze nodul (nodurile) avand cei mai multi vecini
g) sa se afiseze nodurile izolate

Problema 2

Sa se det daca o matrice citita dintr-un fisier poate fi matricea unui graf neorientat. In caz afirmativ se va determina cate muchii are graful

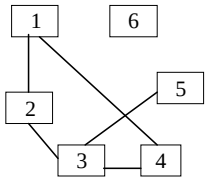
Problema 3

Sa se genereze un graf avand maxim n noduri si maxim m muchii. Sa se afiseze matricea atasata
Observatie: graful nu poate fi decat cel mult complet

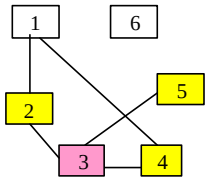
Listele de adiacenta a nodurilor

Reprezentarea in calculator a unui graf se poate face utilizand listele de adiacenta a varfurilor, adica pentru fiecare varf se alcatuieste lista varfurilor adiacente cu el.

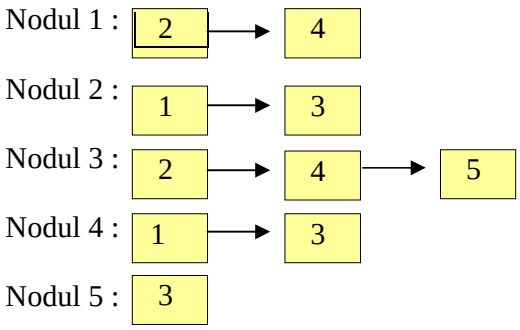
Fie graful din figura urmatoare:



Lista vecinilor nodului 3: 2, 4, 5 (noduri adiacente)



Nodul 6 nu are vecini (este izolat)
Pentru intreg graful vom avea mai multe liste :



Ordinea nodurilor in cadrul unei liste nu este importanta

Pentru a genera o astfel de lista vom defini tipul nod :

struct nod {int nd;
nod *next;};

Toate listele se vor memora utilizand un vector de liste :

nod *L[20];

Datele de intrare : numarul de noduri si muchiile se vor citi din fisier :

O solutie de implementare este urmatoarea :

```
#include<conio.h>
#include<fstream.h>
struct nod
 {int nd;
  nod *next;};

nod *L[20];

void afisare(int nr_nod) //afiseaza lista vecinilor nodului nr_nod
{nod *p=L[nr_nod];
if(p==0)
    cout<<nr_nod<<" este izolat "<<endl;
else
  {cout<<"lista vecinilor lui "<<nr_nod<<endl;
  nod *c=p;
  while(c)
     {cout<<c->nd<<" ";
     c=c->next;}
  cout<<endl;}
}

void main()
```

```
{fstream f;int i,j,n;
 nod  *p,*q;

f.open("graf.txt",ios::in); //citirea datelor din fisier
clrscr();
f>>n;
while(f>>i>>j)
  {p=new nod;  //se adauga j in lista vecinilor lui i
   p->nd=j;
   p->next=L[i];
   L[i]=p;
   q=new nod;  //se adauga i in lista vecinilor lui j
   q->nd=i;
   q->next=L[j];
   L[j]=q;
   }
f.close();

cout<<endl<<"listele de adiacente ";
 for(i=1;i<=n;i++)
    afisare(i);
 getch();
}
```

Observatie : In exemplul anterior adaugarea unui nou element in lista se face inainte celorlalte din lista corespunzatoare.

Aceste doua moduri de reprezentare (prin matrice de adiacenta si prin liste de vecini) se folosesc dupa natura problemei. Adica, daca in problema se doreste un acces frecvent la muchii, atunci se va folosi matricea de adiacenta; daca numarul de muchii care se reprezinta este mult mai mic dect nxn, este de preferat sa se folosesca listele de adiacenta, pentru a se face economie de memorie.

Probleme propuse :

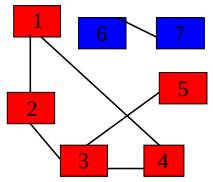
1. 1. Sa se memoreze un graf neorientat utilizand liste de adiacente. Parcurgand listele de adiacenta rezolvati urmatoarele cerinte :
    a. a. Sa se determine daca graful contine noduri izolate
    b. b. Sa se determine fradul unui nod citit de la tastatura
    c. c. Sa se determine nodul cu cel mai mare grad
    d. d. Sa se determine daca nodurile x si y sunt adiacente
    e. e. Sa se verifice daca graful este regulat
    f. f. Sa se determine daca graful este complet

Componente conexe

Fie **G=(V, E)** un graf neorientat, unde V are n elemente (n noduri) si E are m elemente (m muchii).

Definitie: **$G_1=(V_1, E_1)$**este o componenta conexa daca:

- - pentru orice pereche x,y de noduri din V_1 exista un lant de la x la y (implicit si de la y la x)
- - nu exista alt subgraf al lui G, $G_2=(V_2, E_2)$ care sa indeplineasca prima conditie si care sa-l contina pe **G_1**

	Graful alaturat are doua componente conexe: - - subgraful care contine nodurile: **1 2 3 4 5** - - subgraful care contine nodurile: **6 7**

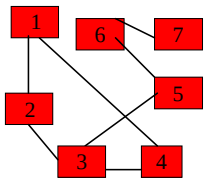
Observatie: subgraful 1, 2, 3, 4 nu este componenta conexa pentru (chiar daca pentru orice pereche x,y de noduri exista un lant de la x la y) deoarece exista subgraful 1, 2, 3, 4, 5 care il contine si indeplineste aceeasi conditie.

Definitie: Un graf G=(V, E)este conex daca pentru orice pereche x,y de noduri din V exista un lant de la x la y (implicit si de la y la x).

Observatii:

- - Un graf este conex daca admite o singura componenta conexa.
- - Graful anterior nu este conex pentru ca admite doua componente conexe

Graful urmator este conex:



Probleme:

1. 1. Fiind dat un graf memorat prin intermediul matricei de adiacenta sa se determine daca graful este conex.
2. 2. Fiind dat un graf memorat prin intermediul matricei de adiacenta si un nod k sa se determine componenta conexa careia ii apartine nodul k
3. 3. Sa se afiseze toate componentele conexe ale unui graf neorientat

Indicatii :

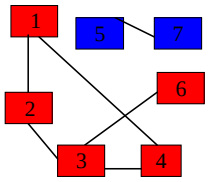
-In vectorul viz se incarca numarul componentei conexe astfel pentru graful urmator, vectorul viz va retine:

viz=[**1,1,1,1,2,1,2**].

-Numarul de componente conexe este 2.

-Se afiseaza componentele cu numarul componentei conexe egal cu 1: **1,2,3,4,6**

-Se afiseaza componentele cu numarul componentei conexe egal cu 2: **5, 7**



-Incarcarea in viz se realizeaza prin parcurgere df pornind de la fiecare nod
-se porneste de la 1, se parcurge df si se incarca in viz valoarea 1 pt nodurile 1, 2, 3, 4, 6. Viz devine:
1,1,1,1,0,1,0
-se porneste in continuare de la primul nod nevizitat, adica 5 si se incarca numarul celei de a doa componente, adica 2
Viz devine: 1,1,1,1,2,1,2
-Nu mai sunt noduri nevizitate si algoritmul se incheie.

Iata o solutie:

```
#include<fstream.h>
#include<conio.h>
int a[20][20],n,m,viz[100],gasit;
int nrc; //pastreaza numarul componentei conexe

void dfmr(int nod)
{ viz[nod]=nrc; //se incarca numarul componentei
 for(int k=1;k<=n;k++)
     if(a[nod][k]==1&&viz[k]==0)
            dfmr(k);
}

void main()
{int x,y,j;
fstream f;
clrscr();
 f.open("muchii.txt",ios::in); //memorare matrice de adiacenta
 if(f)
   cout<<"ok!"<<endl;
 else
   cout<<"eroare la deschidere de fisier!";
 f>>n>>m;
 for(int i=1;i<=m;i++)
    {f>>x>>y;
     a[x][y]=a[y][x]=1;}
cout<<endl<<"matricea de adiacente"<<endl;
for(i=1;i<=n;i++)
```

```
   {for(j=1;j<=n;j++)
      cout<<a[i][j]<<" ";
   cout<<endl;}

for(int nod=1;nod<=n;nod++)
    if(viz[nod]==0) //se incearca parcurgerea numai daca un nod nu a fost deja parcurs
       {nrc++;
       dfmr(nod);}

cout<<endl<<"vectorul viz "<<endl;
for(i=1;i<=n;i++)
   cout<<viz[i]<<" ";

cout<<endl<<"Componentele conexe :"<<endl;
for(i=1;i<=nrc;i++)
   {cout<<endl<<"componenta "<<i<<endl;
   for(j=1;j<=n;j++)
      if(viz[j]==i)
         cout<<j<<" ";
   }
getch();}
```