LUCRUL MECANIC

Noţiunea de lucru mecanic a apărut din necesitatea de a măsura munca (fizică) depusă de om, precum şi de maşinile construite de el pentru a-1 ajuta în această muncă.

Să considerăm situaţia simplă în care un buştean este deplasat pe un plan orizontal cu ajutorul unui cablu de către un om. Aceeaşi deplasare se poate realiza şi cu ajutorul unui cal sau al unui tractor. Generalizând până la abstractizare interacţiunea care se realizează prin intermediul cablului între buştean pe de o parte şi om, cal sau tractor pe de altă parte, s-a ajuns la noţiunea de forţă. Această noţiune ne permite să facem abstracţie de situaţia concretă considerată şi în loc să spunem că omul munceşte, vom spune că forţa $\overline{F}$ produce un lucru mecanic. Lucrul mecanic al forţei $\overline{F}$ este cu atât mai mare cu cât intensitatea forţei şi deplasarea corpului (asupra căruia acţionează forţa) sunt mai mari. Pentru generalizare, se poate face abstracţie şi de corpul considerat şi să spunem că o forţă produce lucru mecanic atunci când punctul său de aplicaţie se deplasează. Ştim că o forţă care acţionează asupra unui rigid are caracterul unui vector alunecător, adică efectul forţei nu se schimbă dacă punctul de aplicaţie se deplasează pe suportul ei. Trebuie să observăm că în cadrul noţiunii de lucru mecanic al unei forţe nu o astfel de deplasare este luată în considerare, ci deplasarea efectivă a punctului de pe corp în care se consideră aplicată forţa.

Denumirea de *lucru mecanic* a fost dată de inginerul francez Gustave Gaspard Coriolis. Conţinutul noţiunii s-a adâncit, o dată cu cea de căldură, în secolul al XlX-lea când s-a dovedit experimental că există un raport constant între cantitatea de lucru mecanic (care este legat de mişcarea mecanică) şi cantitatea de căldură (care este legată de o formă de mişcare nemecanică a materiei) în care acesta se poate transforma.

1. Definiţie

Se consideră un punct material *M* care se deplasează pe traiectoria curbilinie ($\boldsymbol{\Gamma}$), fiind acţionat de forţa variabilă $\overline{F}$. La momentul *t* punctul material se află în M_1 având faţă de un punct de referinţă fix *0* vectorul de poziţie *r*, iar la momentul $t + dt$ se află în M_2, având vectorul de poziţie $\overline{r} + d\overline{r}$.

Prin definiţie se va numi lucrul mecanic elementar, corespunzător forţei $\overline{F}$ şi deplasării elementare $d\overline{r}$, produsul scalar

$$dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{F} \cdot d\overline{r}\right) \qquad \text{unde } \left|d\overline{r}\right| = ds . \qquad (1)$$

Cum $\dot{\overline{r}} = \overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, expresia (1) devine $dL = \overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt$ (2)

Rezultă că: ***lucrul mecanic elementar corespunzător unei forţe $\overline{F}$ şi unei deplasări elementare $d\overline{r}$ a punctului de aplicaţie al forţei este egal cu produsul scalar dintre forţă şi deplasarea elementară.***

În expresia (1) s-a aproximat că în intervalul de timp dt forţa $\overline{F}$ rămâne constantă, iar arcul este egal cu coarda corespunzătoare. Folosind exprimarea analitică a vectorilor $\overline{F}$ şi $d\overline{r}$ în funcţie de proiecţiile vectorilor pe axele unui sistem cartezian *Oxyz* (figura 1) $\overline{F} = \overline{i}F_x + \overline{j}F_y + \overline{k}F_z$; $d\overline{r} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz$, (3) expresia (1) devine: $dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ (4)

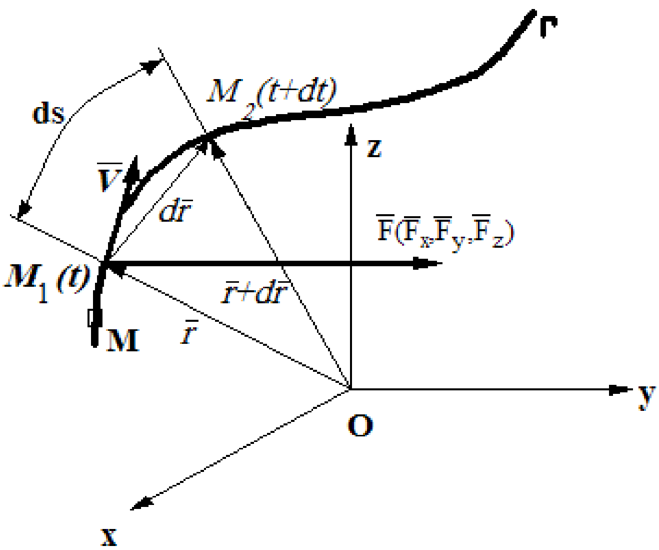


Figura 1

În funcţie de viteza $\overline{v} = \dot{\overline{r}}$, expresia lucrului mecanic elementar este $d\overline{L} = \overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt = \left(F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}\right)dt$.

2. Proprietăţi ale lucrului mecanic:

a) este o mărime scalară având ca unitate de măsură în sistemul internaţional SI joule-ul (J) şi în sistemul tehnic kilogram - forţă - metrul (kgf.m);

b) este pozitiv când $\sphericalangle\left(\overline{F} \cdot d\overline{r}\right) = \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi poartă în acest caz numele de *lucru mecanic motor;*

c) este negativ când $\sphericalangle\left(\overline{F} \cdot d\overline{r}\right) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi se numeşte în acest caz *lucru mecanic rezistent ;*

d) este nul când $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

e) dacă deplasarea $d\overline{r}$ este compusă din *n* deplasări elementare $d\overline{r} = d\overline{r_1} + d\overline{r_2} + ... + d\overline{r_n}$ (5) atunci $dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \overline{F} \cdot d\overline{r_1} + \overline{F} \cdot d\overline{r_2} + ... + \overline{F} \cdot d\overline{r_n}$ (6)

Deci: ***lucrul mecanic elementar corespunzător unei deplasări compuse este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare aferente deplasărilor componente;***

f) dacă forţa $\overline{F}$ reprezintă rezultanta unică a unui sistem de forţe $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n}$ (7) , atunci lucrul mecanic este $dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \overline{F_1} \cdot d\overline{r} + \overline{F_2} \cdot d\overline{r} + ... + \overline{F_n} \cdot d\overline{r}$ (8).

Adică, ***lucrul mecanic elementar corespunzător rezultantei unui sistem de forţe este egal cu suma algebrică a lucrurilor mecanice elementare ale forţelor componente.***

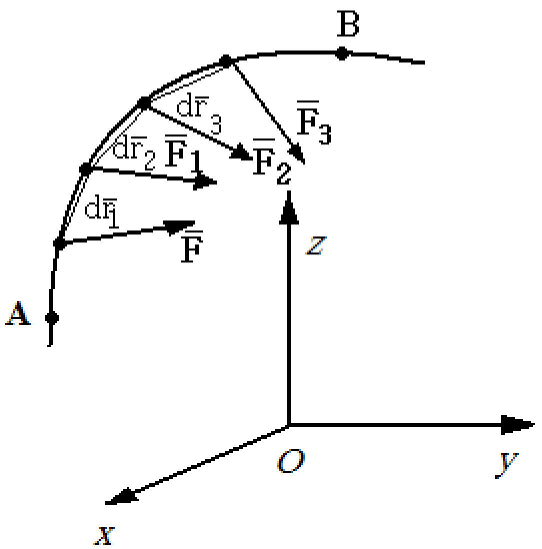


Figura 2

3. Lucrul mecanic total

Când este corespunzător unei forţe variabile $\overline{F}$ şi unei deplasări finite a punctului material între punctele A şi B pe o traiectorie curbilinie (figura 2) lucrul mecanic este dat de expresia:

$$L_{A-B} = \int_{(AB)} (\overline{F} \cdot d\overline{r}) = \int_{(AB)} \left(F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz\right) = \int_{(AB)} (F \cdot ds \cdot \cos\alpha) \quad (9),$$

iar în cazul unui cuplu

$$L_{\theta_1-\theta_2} = \int_{(\theta_1-\theta_2)} (\overline{M} \cdot d\overline{\theta}) = \int_{(\theta_1-\theta_2)} (M \cdot d\theta \cdot \cos\alpha) \qquad (10).$$

Expresia (9) se obţine prin descompunerea mişcării finite în mişcării elementare pentru care forţa $\overline{F}$ se consideră constantă., iar arcul de curbă se aproximează cu coarda şi însumarea lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare.

Din relaţia (9) se observă că lucrul mecanic corespunzător unei deplasări finite a unui punct material şi unei forţe variabile depind atât de modul cum variază forţa, cât şi de forma traiectoriei.

4. Lucrul mecanic în cazul forţelor conservative

În cazul în care forţa $\overline{F}$ este conservativă expresia ei este $\overline{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = gradU$ (11), unde *U(x, y, z)* este funcţia de forţă.

Funcţia de forţă este o funcţie scalară de coordonatele punctului, cu ajutorul căreia se pot determina componentele forţei astfel:

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Pentru a exista o funcţie de forţă trebuie îndeplinite condiţiile lui *Cauchy*, care sunt :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Lucrul mecanic elementar este: $dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$ (12)

$$dL = dU \qquad (13)$$

Lucrul mecanic total este $L_{A-B} = \int_{AB} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_A^B dU = U_B - U_A$ (14),

unde $U_A = U\left(x_A, y_A, z_A\right)$ şi $U_B = U\left(x_B, y_B, z_B\right)$ sunt funcţiile de forţă corespunzătoare poziţiilor iniţială şi finală.

Rezultă că: ***lucrul mecanic total în cazul unei forţe conservative depinde numai de poziţiile iniţială şi finală ale punctului, fiind independent de forma traiectoriei.***

În locul funcţiei *U*, se poate considera funcţia *V*, numită şi *funcţie potenţială* şi definită prin relaţia: $V = -U$. În acest caz, lucrul mecanic elementar are expresia $dL = -dV$.

Funcţia de forţă *U* şi funcţia potenţială *V* nu pot fi determinate decât cu aproximaţia unei constante.

Dacă un punct material este acţionat simultan de un sistem de forţe conservative $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ care derivă din funcţiile de forţă $U_1, U_2, ..., U_n$, astfel încât:

$$F_{x1} = \frac{\partial U_1}{\partial x}; \qquad F_{y1} = \frac{\partial U_1}{\partial y}; \qquad F_{z1} = \frac{\partial U_1}{\partial z};$$

$$F_{x2} = \frac{\partial U_2}{\partial x}; \qquad F_{y2} = \frac{\partial U_2}{\partial y}; \qquad F_{z2} = \frac{\partial U_2}{\partial z};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$F_{xn} = \frac{\partial U_n}{\partial x}; \qquad F_{yn} = \frac{\partial U_n}{\partial y}; \qquad F_{zn} = \frac{\partial U_n}{\partial z};$$

rezultanta $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n}$ va avea proiecţiile:

$$F_x = \frac{\partial(U_1 + U_2 + ... + U_n)}{\partial x};$$

$$F_y = \frac{\partial(U_1 + U_2 + ... + U_n)}{\partial y};$$

$$F_z = \frac{\partial(U_1 + U_2 + ... + U_n)}{\partial z};$$

adică rezultanta $\overline{R}$ derivă din funcţia de forţă $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$. Un astfel de sistem de forţe se numeşte sistem conservativ.

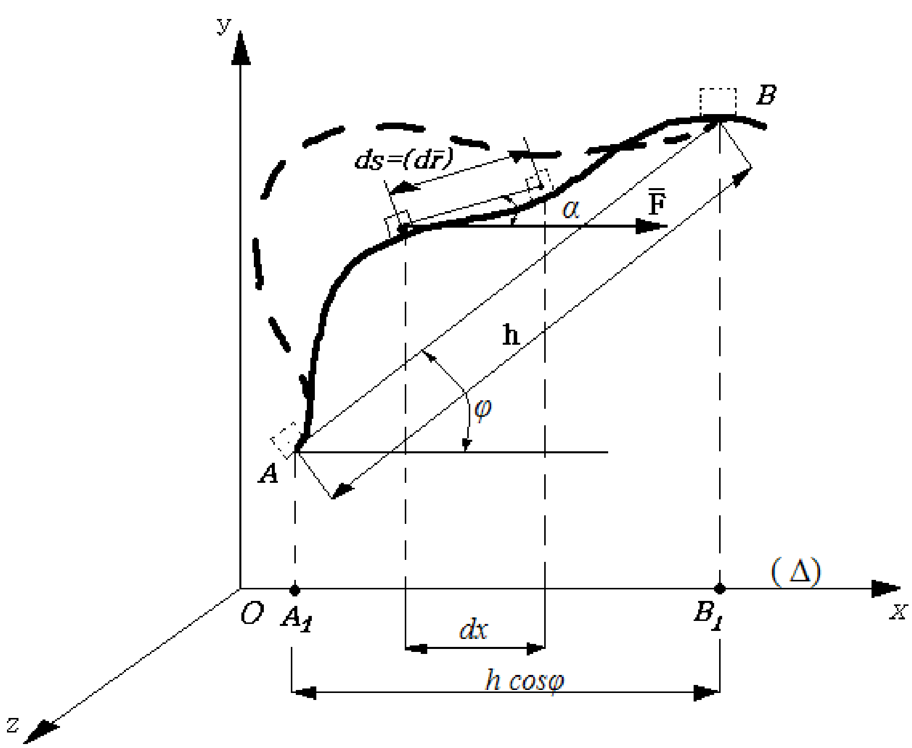


Figura 3

__Exemple__: a) Forţa $\overline{F}$ este constantă ca modul şi direcţie iar traiectoria este o curbă oarecare (figura 3). Faţă de sistemul de axe ales, se poate scrie

$$F = F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_y = F_z = 0 \qquad (15), \qquad \text{deci: } U = xF + C \qquad (16)$$

Rezultă $L_{A_1-B_1} = U_{B_1} - U_{A_1} = \pm F \cdot h \cdot \cos\varphi$ (17), unde φ este unghiul dintre segmentul de dreaptă *AB* şi axa *Ox*.

Semnul plus se ia când punctul coboară, iar semnul minus când punctul urcă.

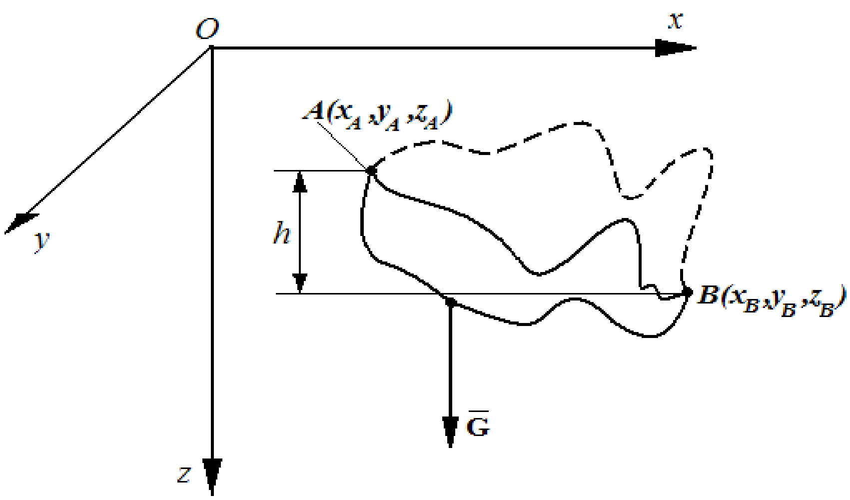


Figura 4

b) În cazul în care $\overline{F}$ este o forţă gravitaţională (figura 4) notând-o cu G, rezultă:

$$G_x = G_y = 0\,,$$

$$G_z = G = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad (18)$$

$$U = zG + C\,,$$

$$L_{A-B} = G(z_B - z_A)\,.$$

În general

$$L = \pm Gh \qquad (19).$$

Rezultă că: ***lucrul mecanic al unei greutăţi nu depinde de forma traiectoriei pe care se deplasează punctul său de aplicaţie, ci depinde. numai de poziţiile extreme între care se efectuează mişcarea, fiind egal cu produsul dintre valoarea numerică a forţei şi diferenţa de cotă dintre poziţiile iniţială şi finală.***

c) *Lucrul mecanic al unei forţe elastice.* Se consideră un resort spiral *OM* în stare liberă fixat în punctul *0* (figura 5). Prin întinderea arcului cu lungimea *x* ia naştere o forţă $\left|\overline{F}\right| = kx$, proporţională cu alungirea resortului. Coeficientul de proporţionalitate notat prin *k* poartă numele de constantă elastică a resortului şi reprezintă forţa necesară pentru a produce o alungire a resortului egală cu unitatea. Pentru o deplasare elementară dx a punctului *M* din *M'* în *M''*, lucrul mecanic elementar corespunzător forţei elastice $\overline{F}$ şi deplasării *dx* este :

$$dL = -F \cdot dx = -k \cdot x \cdot dx \qquad (20).$$

Pentru o deplasare finită din *A* în *B* a extremităţii *M* a resortului când acesta este întins, lucrul mecanic va fi

$$L_{A-B} = -\int_A^B k \cdot x \cdot dx = -\frac{1}{2} k\left(x_B{}^2 - x_A{}^2\right) \qquad (21)$$

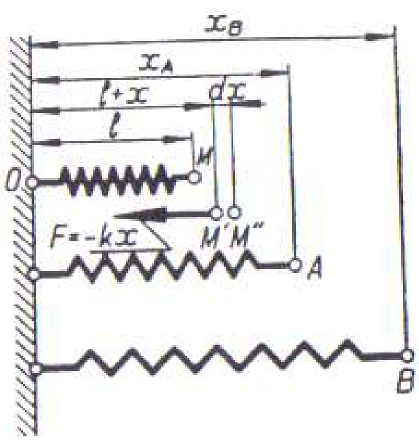


Figura 5

5. Lucrul mecanic elementar corespunzător unui sistem de forţe ce acţionează asupra unui solid rigid

Se consideră un solid rigid liber (figura 6), supus acţiunii unui sistem de forţe active $\overline{F_i}\left(i = 1;2....n\right)$.

Lucrul mecanic elementar corespunzător forţei $\overline{F_i}$ şi deplasării elementare $d\overline{r_i}$, a punctului de aplicaţie M_i, al forţei este :

$$dL_i = \overline{F_i} \cdot d\overline{r_i} = \overline{F_i} \cdot \overline{v_i} \cdot dt \qquad (22)$$

Notând cu:

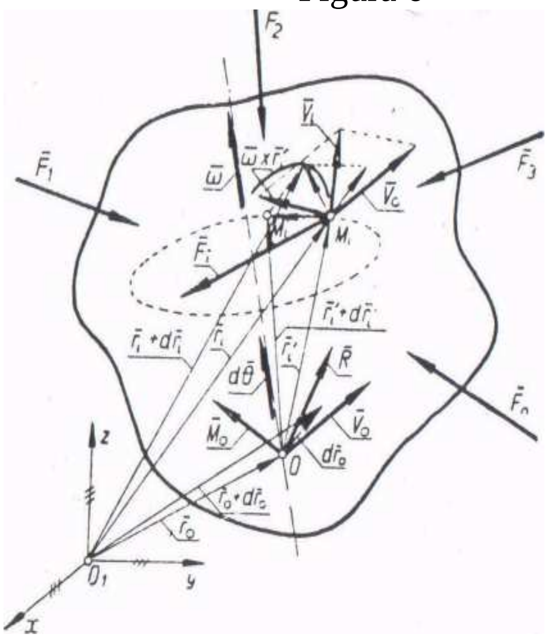
$\overline{v_0}$ — viteza punctului *O*, aparţinând solidului rigid ;

$\overline{\omega}$— viteza unghiulară de rotaţie relativă a solidului rigid faţă de punctul *0*, relaţia (22) devine :

$$dL_i = \overline{F_i}\left(\overline{v_0} - \overline{\omega}\times\overline{r_i}'\right)dt = \overline{F_i}\cdot\overline{v_0}\cdot dt + \left(\overline{r_i}'\times\overline{F_i}\right)\overline{\omega}'\cdot dt \, ,$$

unde $\overline{r_i}'$ este vectorul de poziţie al punctului M_i faţă de punctul *0*. Pentru întregul sistem de forţe se obţine $dL = v_0\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}\cdot dt + \overline{\omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{r_i}'\times\overline{F_i}\right)dt$.

Figura 6



Dar

1. $\overline{v_0}\cdot dt = d\overline{r_0}$ — deplasarea elementară prin translaţie a rigidului

2. $\overline{\omega}\cdot dt = d\overline{\theta}$ — unghiul elementar de rotaţie considerat ca vector;

3. $\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i} = \overline{R}$ — vectorul rezultant al sistemului de forţe active;

4. $\sum_{i=1}^{n}\overline{r_i}'\times\overline{F_i} = \overline{M_0}$ — vectorul moment rezultant al sistemului de forţe active relativ la polul *0;*

Adică

$$dL = \overline{R}\cdot d\overline{r_0} + \overline{M_0}\cdot d\overline{\theta} \qquad (23)$$

Un caz important în aplicaţiile tehnice este acela al unui rigid acţionat de un cuplu $\left(\overline{F};-\overline{F}\right)$.În acest caz mişcarea rigidului este o rotaţie. Având în vedere că $\overline{R}=0$, din relaţia (23) se obţine :

$$dL = \overline{M_0}\cdot d\overline{\theta} \qquad ; \; L = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\overline{M_0}\cdot d\overline{\theta} \qquad (24)$$

Când axa de rotaţie coincide cu suportul lui $\overline{M_0}$ şi acesta este constant, rezultă:

$$L = M_0\cdot\left(\theta_2-\theta_1\right) = \pm M_0\cdot\Delta\theta \qquad (25)$$

6. Lucrul mecanic al forţelor interioare

Se consideră două puncte materiale M_i şi M_j asupra cărora acţionează forţele interioare $\overline{F_{ij}}$ şi respectiv $\overline{F_{ji}}$ (figura 7). Fie $\overline{r_i}$ şi $\overline{r_j}$ vectorii de poziţie ai punctelor M_i şi M_j în raport cu punctul fix *0*.

Lucrul mecanic elementar aferent forţelor $\overline{F_{ij}}$ şi $\overline{F_{ji}}$ şi deplasărilor elementare ale punctelor de aplicaţie ale forţelor este

$$dL = \overline{F_{ij}}\cdot d\overline{r_i} + \overline{F_{ji}}\cdot d\overline{r_j} = \overline{F_{ij}}\left(d\overline{r_i} - d\overline{r_j}\right).$$

Deoarece $\begin{cases}\overline{F_{ji}} = -\overline{F_{ij}}\\ d\overline{r_i} - d\overline{r_j} = d\left(\overline{r_i}-\overline{r_i}\right) = d\left(\overline{M_j M_i}\right)\\ \overline{F_{ij}} = \lambda\overline{M_j M_i}\end{cases}$ rezulta că $dL = \frac{1}{2}\lambda\, d\left(\overline{M_j M}^{2}\right)$ (26)

În expresia (26) λ este un scalar pozitiv sau negativ după cum punctele M_i şi M_j se resping sau se atrag.

Dacă punctele materiale aparţin unui sistem material rigid $\overline{M_j M_i} = const$, iar $dL = 0$, rezultă că: ***suma lucrurilor mecanice elementare ale forţelor interioare ce acţionează punctele unui sistem material rigid, pentru orice deplasare elementară a sistemului este nulă.***

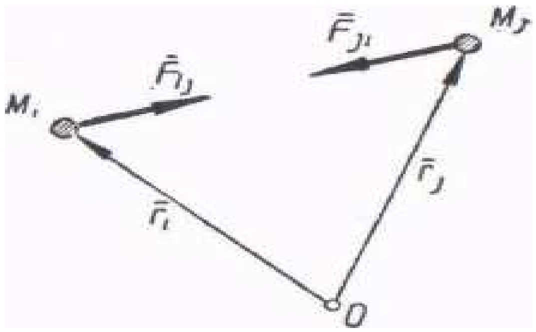


Figura 7

7. Reprezentarea grafică a lucrului mecanic

În figura 8 este arătată reprezentarea grafică a lucrului mecanic cu ajutorul unei diagrame. În abscisă se reprezintă proiecţia deplasării pe direcţia forţei, iar în ordonată este reprezentată forţa.

Lucrul mecanic corespunzător forţei $F(s)$ şi deplasării finite $s_1 s_2$ este egal cu valoarea ariei dată de diagrama *a*

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \text{suprafaţa } s_1 s_1' s_2' s_2 \qquad (27)$$

iar în cazul unui moment prin valoarea suprafeţei date de diagrama *b*.

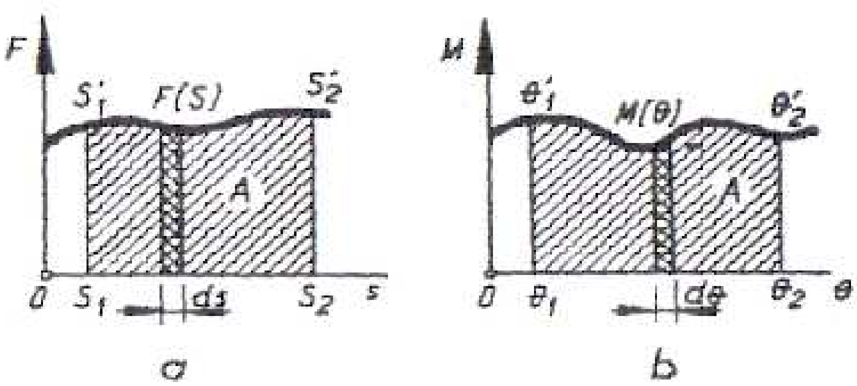


Figura 8